

Teorema de Radó-Kneser-Choquet como antecedente del teorema del mapeo de Riemann para funciones armónicas

Aldair Enrique Ruíz Banquett



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2019

Teorema de Radó-Kneser-Choquet como antecedente del teorema del mapeo de Riemann para funciones armónicas

Aldair Enrique Ruíz Banquett

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de
Matemático

Asesor:

Luis Enrique Benítez Babilonia



UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA
MONTERÍA

2019

UNIVERSIDAD DE CÓRDOBA
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS Y ESTADÍSTICA

Los jurados abajo firmantes certifican que han leído y que aprueban el trabajo de grado titulado: **Teorema de Radó-Kneser-Choquet como antecedente del teorema del mapeo de Riemann para funciones armónicas**, el cual es presentado por el estudiante **Aldair Enrique Ruíz Banquett**.

Fecha: Diciembre de 2019

Asesor: _____

Luis Enrique Benítez Babilonia

Jurado: _____

Profesor Jurado 1

Jurado: _____

Profesor Jurado 2

*A mis padres Marlis Banquett y Leonidas Ruiz
A mis hermanos y demás familiares
También a mis grandes esfuerzos para estudiar
que me llevaron hasta este punto de mi vida.*

Índice general

Resumen	<i>v</i>
Abstract	<i>vi</i>
Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Funciones Armónicas	5
1.2. El Problema de Dirichlet en el disco	14
1.3. Teorema de Montel	22
1.4. Teorema de Hurwitz	22
1.5. Teorema del mapeo de Riemman	26
2. Teorema de Radó-Kneser-Choquet	28
2.1. Propiedades generales de mapeos armónicos	28
2.2. Teorema de Lewy	33
2.3. Lema de Heinz	36
2.4. Teorema de Radó	39
2.5. Teorema de Radó-Kneser-Choquet	42
2.6. Comentarios y consideraciones finales	48
Bibliografía	50

Resumen

El objetivo principal de este trabajo es estudiar el Teorema de Radó-Kneser-Choquet, el cual trata de las asignaciones armónicas del disco unitario en regiones convexas. El teorema de Radó-Kneser-Choquet, en pocas palabras construye un mapeo armónico del disco unitario en cualquier dominio convexo acotado, con una correspondencia prescrita.

Este teorema fue propuesto por primera vez en 1926 por Tibor Radó, quien lo planteó como un problema en el *Jahresberichte* (en sus informes anuales). Después, Helmut Kneser proporcionó una prueba breve y elegante. Luego, pasó un período de casi 20 años antes de que Gustave Choquet, aparentemente inconsciente de la nota de Kneser, redescubriera el resultado y diera una prueba detallada que presenta algunas características en común con Kneser, pero en general se puede decir que no es lo mismo. De hecho, los dos enfoques permiten que el teorema se generalice en diferentes direcciones.

Para ello, nos centraremos en algunos resultados principales como: El Teorema del mapeo de Riemann para funciones analíticas, Teorema de Ascoli, Teorema de Montel, Teorema de Lewy, la ecuación de Beltrami, entre otros, que darán paso a la demostración de nuestro teorema principal.

Abstract

The main purpose of this work is to study the Radó-Kneser-Choquet Theorem, which deals with the harmonic assignments of the unit disk in convex regions. The Radó-Kneser-Choquet Theorem, shortly, constructs a harmonic mapping from the unit disk in any convex domain bounded, with a prescribed correspondence.

This theorem was first proposed in 1926 by Tibor Radó, who raised it as a problem in the *Jahresberichte* (in its annual reports). Later, Helmut Kneser provided a brief and elegant proof. Then, a period of almost 20 years happened before Gustave Choquet, apparently unaware of Kneser's note, rediscovered the result and gave a detailed proof that presents some features in common with Kneser, but in general it can be said, that it is not the same. In fact, the two approaches allow the theorem to become generalized in different directions.

To do this, we will focus on some main results such as: Riemann's Mapping Theorem for Analytical Functions, Ascoli Theorem, Montel Theorem, Lewy's Theorem, Beltrami's Equation and among a few others, that will give way to the proof of our main theorem.

Agradecimientos

Primero que todo, quiero darle gracias a mis padres, por su apoyo incondicional durante todo este recorrido y a mis compañeros que me brindaron su apoyo durante toda mi carrera.

Así mismo, agradezco a la Universidad de Córdoba, al plantel de profesores del Departamento de Matemáticas y Estadística, especialmente al profesor Luis Benítez, por su confianza y rigurosa asesoría en el desarrollo de este trabajo y al profesor Carlos Banquet, por darme la oportunidad de trabajar por esta carrera.

También a Jamer Martínez, Antonio Martínez y Fabricio Parra, mis amigos incondicionales.

Introducción

Los números complejos nacen de la necesidad de encontrar una extensión algebraicamente cerrada de los números reales, dado que desde los cursos elementales de matemáticas nos hemos tropezado con las llamadas raíces imaginarias o complejas de polinomios. A partir de aquí, se puede pensar que el concepto de una función de una o varias variables reales puede ser extendido en el sentido de los complejos. La idea es la de siempre: si en un determinado conjunto del plano complejo \mathbb{C} , a un número complejo z le corresponde un número complejo $w = f(z)$, diremos que f es una función de variable compleja z . Entre ese tipo de funciones se encuentran las llamadas funciones analíticas. De hecho, diremos que una función es analítica en un conjunto abierto $\Omega \subseteq \mathbb{C}$, si es diferenciable en el sentido complejo en todos los puntos dentro de Ω , esto significa que en cada punto z_0 de Ω se tiene que el siguiente límite existe:

$$f'(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

La definición de función analítica es más rica que la derivabilidad real, pues las funciones analíticas en Ω siempre son de clase C^∞ y para el caso real esto no siempre es cierto. De aquí, el análisis complejo se provee de un especial interés por lo sorprendente de algunos de sus teoremas. En nuestro escrito, y como usualmente se hace, denotaremos a $H(\Omega)$ como el conjunto de funciones analíticas sobre Ω . También, denotaremos como $\partial\Omega$ a la frontera de Ω . Además, si los elementos de $H(\Omega)$ satisfacen la condición de inyectividad, entonces nos referiremos a ellos como funciones analíticas univalentes o “mapeos conformes” en el sentido de la “igualdad” o “conservación” de ángulos [10]. Por otro lado, se dirá que una función es localmente univalente en un punto $z_0 \in \Omega$, si es univalente en una vecindad de z_0 . Además, por el Teorema de la

Función Inversa, para funciones analíticas f , la condición $f'(z_0) \neq 0$ es equivalente a univalencia local en z_0 .

Un resultado importante para el análisis complejo, fue el que se dio en la historia de los mapeos conformes en 1851, cuando Riemann enunció el bien conocido teorema del mapeo de Riemann que establece que cada dominio simplemente conexo que no sea todo \mathbb{C} , puede ser mapeado conformemente al disco unitario, que en adelante será denotado por \mathbb{D} . La prueba de Riemann tácitamente presuponía la existencia de una solución a un cierto problema extremo para la integral de Dirichlet y, por lo tanto, era incompleta [12]. Medio siglo más tarde, Paul Koebe encontró una prueba que evita dicha dificultad, al plantear un problema extremo sobre una familia normal, basado en el teorema de familias normales de Montel, donde la existencia de una función extrema está asegurada. La prueba de Koebe se ha convertido en un modelo estándar para las pruebas de existencia en la teoría geométrica de funciones.

Gracias al Teorema del Mapeo de Riemann, el estudio de muchas preguntas relacionadas con la univalencia sobre un dominio simplemente conexo cualquiera se reduce a trabajar sobre el disco unitario. Además, el teorema se puede ver como una introducción al comportamiento de frontera de los mapeos conformes.

También, el análisis complejo juega un papel fundamental en el estudio de las ecuaciones en derivadas parciales y en muchos campos de las ciencias físico-matemáticas. En particular, la teoría de funciones analíticas es una herramienta fundamental en la solución de problemas con condiciones en la frontera para la ecuación de Laplace. Esto es debido a la conexión que poseen las funciones analíticas de variable compleja con las funciones armónicas de variable real. Las funciones armónicas (**Definición 1.1.1**) juegan un papel importante en las matemáticas aplicadas. Por ejemplo, las temperaturas $T(x, y)$ en placas delgadas que se encuentran en el plano xy suelen ser armónicas. En la física, una función $V(x, y)$ es armónica cuando denota un potencial electrostáticos.

Cabe notar que los mapeos armónicos en el plano (**Definición 1.1.2**), son funciones armónicas de valores complejos cuyas partes reales e imaginarias no necesariamente satisfacen las ecuaciones de Cauchy Riemann. Entonces las funciones armónicas no

necesitan ser analíticas o conformes

Aunque los mapeos armónicos son generalizaciones naturales de mapeos conformes, fueron estudiados originalmente por la geometría diferencial debido a su papel natural en la parametrización de superficies mínimas. Solo a mediados de la década de los 80, las funciones armónicas comenzaron a tener interés entre los analistas complejos. El impulsor fue un documento histórico de James Clunie y Terry Shel-Small [2] en 1984 señalando que muchos de los resultados clásicos para mapeos conformes, tienen claros análogos para mapeos armónicos [6].

Entre los resultados que se encuentran para mapeos armónicos, deducidos de análogos para mapeos conformes, destacan la propiedad de la media aritmética en funciones armónicas, que es análoga a la **propiedad de la media** para mapeos conformes. Otras consecuencia de mapeos conformes es el Teorema de Lewy (**Teorema 2.2.1**) que resulta ser cierto para mapeos armónicos y la **ecuación de Beltrami** que presenta de igual forma su generalización para mapeos armónicos.

Por otro lado, una función f se dice que preserva la orientación si $J(f) > 0$ y que invierte la orientación si $J(f) < 0$, donde J es el Jacobiano del mapeo f dado por:

$$J(f) = |\partial_z f|^2 - |\partial_{\bar{z}} f|^2, \quad \text{con} \quad \partial_z f = \frac{1}{2}(f_x - if_y) \quad y \quad \partial_{\bar{z}} f = \frac{1}{2}(f_x + if_y).$$

Las asignaciones armónicas de \mathbb{D} que preservan la orientación también surgen como soluciones de la **Ecuación de Beltrami**, es decir, soluciones a ecuaciones diferenciales parciales elípticas lineales de la forma

$$\overline{\partial_{\bar{z}} f(z)} = q(z) \partial_z f(z),$$

donde q es una función analítica en \mathbb{D} . Cabe resaltar que q es llamada la dilatación de f . Además, las funciones que satisfacen la ecuación anterior se denominan quasiconformes, siempre y cuando el supremo del módulo de la dilatación sea estrictamente menor que uno, es decir, $\sup |q| < 1$.

El trabajo en general está conformado por dos capítulos y están compuestos de la siguiente manera.

El Capítulo 1 se presenta como una oportunidad de que el trabajo quede con un contenido lo suficientemente detallado y sea comprensible para alguien que tenga co-

nocimientos básicos de un curso de análisis complejo. En primer lugar, se estudiará un breve resumen de conceptos previos elementales, que se aprovechará para introducir la notación de la que haremos uso.

Inicialmente, se estudiarán las funciones armónicas con el objetivo de entender todos los resultados importantes. Después estudiaremos las familias normales, es decir, las familias de funciones analíticas que son relativamente compactas en la topología de $H(\Omega)$. El resultado más importante de estas familias es el **Teorema de Montel**, que afirma que una familia es normal si y solo si sus funciones están uniformemente acotadas sobre compactos. Esta caracterización es crucial para construir la biyección conforme del **Teorema de Riemann** y es una de las piezas que faltaban en el argumento original de Riemann. También, probaremos el **Teorema de Hurwitz**, del cual obtendremos que el límite de una sucesión de funciones analíticas inyectivas es constante o inyectivo. Este resultado jugará un papel importante a la hora de demostrar la inyectividad de la biyección conforme de Riemann y por último se dará un breve comentario sobre la equivalencia entre el Teorema de Riemann y el Problema de Dirichlet. Para más información, estos resultados pueden consultarse en [3],[7],[10],[11].

El Capítulo 2 contiene las pruebas detalladas de los resultados principales y sus aplicaciones. Entre ellos se encuentran, el **Teorema de Lewy**, que afirma que si f es una función armónica complejo valuada que es localmente univalente en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces el Jacobiano siempre es distinto de cero. Otro resultado destacado es el **Lema de Heinz**, que nos dice que si f es un mapeo armónico del disco unitario a él mismo, con $f(0) = 0$, entonces $|f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2 \geq c$. También tenemos el **Teorema de Radó**, que nos dice que no hay un mapeo armónico de \mathbb{D} en \mathbb{C} . Todos los resultados mencionados anteriormente nos llevarán a nuestro resultado principal, el cuál es el **Teorema de Radó-Kneser-Choquet**.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo presentamos algunos preliminares que nos ayudarán en la comprensión de nuestro resultado principal el cual tiene como nombre Teorema de Radó-Kneser-Choquet y se puede ver como un antecedente del Teorema del mapeo de Riemann para funciones armónicas. En primer lugar se analizarán las funciones armónicas para poder comprender después el Problema de Dirichlet y obtener su solución en el disco unitario mediante el núcleo de Poisson que nos ayudará en la comprensión de nuestro teorema principal.

1.1. Funciones Armónicas

Para formular y resolver el problema de Dirichlet y los teoremas de Montel y Hurwitz es necesario realizar trabajo previo sobre funciones armónicas debido a su relación estrecha con las funciones analíticas.

Definición 1.1.1. Una función de valores reales $u(x, y)$ con segundas derivadas continuas, se dice armónica en $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, si satisface la ecuación de Laplace, esto es,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

También, denotaremos $A_{\mathbb{R}}(\Omega)$ como el conjunto de funciones armónicas real valuadas.

Para una función $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, al usar la notación compleja, es decir,

$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, con $z = x + iy$, se puede extender el concepto de armonicidad de la siguiente manera.

Definición 1.1.2. La función f se dice armónica en Ω , si las dos funciones coordenadas u y v son armónicas en Ω .

Denotaremos por $A(\Omega)$ al conjunto de funciones armónicas en Ω con valores en \mathbb{C} .

Proposición 1.1.1. Si la función $f = u + iv$ es analítica en Ω , entonces $u = \mathbf{Re}(f)$ y $v = \mathbf{Im}(f)$ son funciones armónicas en Ω .

Demostración. Como f es analítica, entonces f es de clase $C^\infty(\Omega)$, esto implica que $u, v \in C^\infty(\Omega)$, en particular $u \in C^2(\Omega)$. Además, por ser f analítica verifica las ecuaciones de Cauchy-Riemann, es decir, $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Derivando se obtiene

$$u_{xx} = v_{yx} \quad \text{y} \quad u_{yy} = -v_{xy}.$$

Luego, como $v \in C^2(\Omega)$, entonces se tiene la igualdad $v_{xy} = v_{yx}$. Por lo tanto

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = v_{yx} - v_{xy} = 0.$$

Para el caso de v , la prueba es completamente análoga. □

Nota 1.1. Observemos de la proposición anterior que toda función analítica es armónica, es decir, $H(\Omega) \subset A(\Omega)$, pero el recíproco no siempre es cierto, es suficiente mostrar un ejemplo para verificar que la contención es estricta. Pero antes se mostrarán algunos conceptos.

Introduciremos a continuación el concepto de armónica conjugada, que nos será de mucha utilidad.

Definición 1.1.3. Sea $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Si existe $v \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$ tal que $f = u + iv$ es analítica, se dice que v es una función armónica conjugada de u en Ω .

Con respecto a la definición anterior se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.1.2. Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$, si v_1 y v_2 son dos funciones armónicas conjugadas de u , entonces $v_1 - v_2$ es constante.

Demostración. Por la definición de armónica conjugada, $u + iv_1$ y $u + iv_2$ son ambas analíticas y por tanto su diferencia también lo será. Pero $i(v_1 - v_2)$ es constante o $i(v_1 - v_2)(\Omega)$ es abierto esto debido al teorema de la aplicación abierta. Pero no puede ser abierto pues está contenido en la recta $\{iy : y \in \mathbb{R}\}$, luego $v_1 - v_2$ es constante. \square

A continuación se presenta un ejemplo de una función armónica que no tiene armónica conjugada.

Ejemplo 1. La función $f(z) = \log|z|$ es armónica en $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ pues es localmente la parte real de cualquier determinación analítica de $\log(z)$. Veamos que $\log|z|$ no tiene armónica conjugada en Ω . Consideremos el abierto

$$\Upsilon = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im}(z) = 0 \text{ y } \operatorname{Re}(z) \leq 0\}.$$

Entonces tenemos un logaritmo analítico, que fijamos como el principal.

$$\operatorname{Log}(z) = \log|z| + i\operatorname{Arg}(z).$$

Si $\log|z|$ tuviera una armónica conjugada, digamos $v \in \Omega$, tendríamos que $\operatorname{Arg}(z)$ y v son armónicas conjugadas de u en Ω y por tanto en este abierto su diferencia sería una constante, es decir, $v(z) = \operatorname{Arg}(z) + k$. Esto implica que v sería discontinua en los puntos de la recta donde z toma valores reales negativos, que está contenida en Ω , lo cual es una contradicción dado que por hipótesis inicial v es armónica en Ω . Por tanto, $\log|z|$ no posee armónica conjugada en Ω .

Es lógico buscar entonces alguna condición que nos garantice la existencia de armónicas conjugadas. Pero primero daremos la definición de un abierto simplemente conexo. Debemos aclarar esta definición pues jugará un papel importante.

Definición 1.1.4. Un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ se dice que es simplemente conexo si cada camino cerrado $\gamma \subset \Omega$ es Ω -homotópico a un camino constante, es decir, si existe una función continua $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$ y un punto $a \in \Omega$ tal que $h(0, t) = \gamma(t)$ y $h(1, t) = a$ para todo $t \in [0, 1]$ y $h(s, 0) = h(s, 1)$ para todo $s \in [0, 1]$.

Ahora, llamaremos plano complejo ampliado al conjunto $\mathbb{C}_\infty = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ y denotaremos por $\partial_\infty \Omega$ a la frontera del conjunto Ω en \mathbb{C}_∞ .

Por otro lado, el siguiente teorema nos muestra ciertas equivalencias sobre abiertos simplemente conexos.

Teorema 1.1.3. (Caracterización de abiertos simplemente conexos). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. El conjunto Ω es simplemente conexo.
- ii. El conjunto $\mathbb{C}_\infty \setminus \Omega$ es conexo.
- iii. Cada ciclo regular a trozos en Ω es Ω -analítico a cero.
- iv. Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , cada punto $z \in \Omega \setminus \text{Imagen}(\Gamma)$ y cada $f \in H(\Omega)$, se verifica:
$$\eta(\Gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(w)}{w - z} dw.$$
- v. Para cada ciclo regular a trozos Γ en Ω , y cada $f \in H(\Omega)$ se cumple $\int_{\Gamma} f(z) = 0$.
- vi. Para cada $f \in H(\Omega)$ existe $F \in H(\Omega)$ tal que $F' = f$.
- vii. Para cada $f \in H(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in H(\Omega)$ tal que $e^g = f$.
- viii. Para cada $f \in H(\Omega)$ con $0 \notin f(\Omega)$ existe $g \in H(\Omega)$ tal que $g^2 = f$.
- ix. Existe un homeomorfismo entre Ω y \mathbb{D} .

Demostración. Véase [3],[14] □

Proposición 1.1.4. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo. Entonces toda función armónica $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$ tiene una función armónica conjugada en Ω .

Demostración. Sea $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Entonces la función $f = u_x - iu_y$ es analítica en Ω : por un lado, f es de clase $C^1(\Omega)$ pues u es de clase $C^2(\Omega)$, por otro lado, f cumple las ecuaciones de Cauchy-Riemann ya que u es armónica, es decir,

$$(u_x)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y,$$

además $(u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = (u_y)_x$, debido a la igualdad de las derivadas cruzadas que se sigue de que $u \in C^2(\Omega)$.

Ahora bien, del **Teorema 1.1.3** se deduce la existencia de una función analítica $F = U + iV$ tal que $F' = f = u_x - iu_y$. Aplicando a F las ecuaciones de Cauchy-Riemann obtenemos que $U_x - iU_y = u_x - iu_y$, es decir, $(U - u)_x = 0$ y $(U - u)_y = 0$. Dicho de otra forma, $U = u + k$ en Ω , donde $k \in \mathbb{R}$ es una constante.

Finalmente, definiendo $g = F - k$ se tiene que $\mathbf{Re}(g) = u$ e $\mathbf{Im}(g) = V$. Por tanto V es la armónica conjugada de u . \square

Observación 1. Para un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ simplemente conexo y una función armónica $u \in \Omega$, llamaremos a $f = u + iv$ una completación analítica de u , con v una armónica conjugada para u .

El recíproco de esta proposición es también cierto, pero necesitaremos algunos resultados antes de estar en condiciones de demostrarlo.

Proposición 1.1.5. Dado un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y una función $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Entonces, u es armónica si y sólo si u es localmente la parte real de una función analítica.

Demostración. Sabemos que u es armónica si y sólo si lo es localmente, es decir, si lo es en $D(a, r)$ para cada $a \in \Omega$. Pero en cada disco, u tiene armónica conjugada ya que es un abierto simplemente conexo, por tanto, en dicho disco es la parte real de una función analítica. Recíprocamente, si en cada disco es la parte real de una función analítica, claramente es armónica. \square

Corolario 1.1.6. Toda función armónica es de clase C^∞ .

Demostración. Esta prueba es inmediata, dado que son localmente, partes reales de funciones analíticas. \square

Proposición 1.1.7. Sean $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ abiertos, $f \in H(\Omega_1)$, $f(\Omega_1) \subset \Omega_2$ y $u \in A(\Omega_2)$. Entonces, $u \circ f \in A(\Omega_1)$. Es decir, la composición de una función analítica con una función armónica es una función armónica.

Demostración. Veremos que $u \circ f$ es armónica en $D(a, \delta)$ para cada $a \in \Omega$. Fijemos a y sea $b = f(a)$ y $r > 0$ tal que $D(b, r) \subset \Omega_2$. Como u es armónica, existe $g \in H(D(b, r))$ tal que $\mathbf{Re}(g) = u(z)$. Aplicando ahora la continuidad de f , existe $\delta > 0$ tal que

$f(D(a, \delta)) \subset D(b, r)$. Concluimos entonces que $g \circ f|_{D(a, \delta)} \in H(D(a, \delta))$ y además $\operatorname{Re}(g \circ f|_{D(a, \delta)}) = u \circ f|_{D(a, \delta)}$, con lo cual $u \circ f$ es armónica. \square

Ahora, podemos finalmente dar una nueva caracterización de los abiertos simplemente conexos.

Teorema 1.1.8. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i. Ω es simplemente conexo.
- ii. Toda función armónica $u \in A(\Omega)$ tiene una función armónica conjugada en Ω .

Demostración. Veamos la demostración de cada implicación

$i) \Rightarrow ii)$ Es la **Proposición 1.1.4**

$ii) \Rightarrow i)$ Haremos uso de una de las caracterizaciones de los abiertos simplemente conexos, que se estudiaron en el **Teorema 1.1.3** y nos garantiza que Ω es simplemente conexo si y solo si toda función analítica que no se anula tiene un logaritmo analítico. Sea pues, $f \in H(\Omega)$ tal que $0 \notin f(\Omega)$. Entonces $u(z) = \log|f(z)|$ es armónica en Ω por ser composición de una función armónica con una analítica. Por hipótesis, tendrá entonces una armónica conjugada, es decir, existirá $v \in A(\Omega)$ tal que $u + iv \in H(\Omega)$. Entonces $\left| \frac{e^{u+iv(z)}}{f(z)} \right| = \frac{e^{u(z)}}{f(z)} = 1$, para todo $z \in \Omega$, es decir, $e^{u+iv} = \lambda f$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ una constante. Concluimos, entonces $e^{u+iv-\mu} = f$, donde $\mu \in \log(\lambda)$. Dicho de otro modo, $u + iv - \mu$ es un logaritmo analítico de f en Ω . \square

Estudiaremos a continuación algunas propiedades sobre las funciones armónicas, algunas de las cuales guardan cierta analogía con las propiedades de las funciones analíticas. Para continuar con lo dicho anteriormente daremos las siguientes definiciones.

Definición 1.1.5. Sea $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que f satisface la propiedad de la media si para cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$,

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Definición 1.1.6. Sea $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Se dice que f es subarmónica si $f(\Omega) \subset \mathbb{R}$ y para cada $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$,

$$f(a) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

Los siguientes ejemplos presentan una motivación para las definiciones anteriores.

Proposición 1.1.9. Se tiene que:

- i. Toda función analítica tiene la propiedad de la media.
- ii. La parte real y la parte imaginaria de una función analítica satisface la propiedad de la media.
- iii. El módulo de una función analítica es una función subarmónica.

Demostración. i) Si $f \in H(\Omega)$, $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ y $\gamma(t) = a + re^{it}$ con $t \in [0, 2\pi]$, sabemos por la fórmula de la integral de Cauchy que

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(w)}{w - a} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(a + re^{it}) ire^{it}}{a + re^{it} - a} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt.$$

- ii) Tomando partes reales e imaginarias en la igualdad anterior obtenemos que $\mathbf{Re}(f)$ e $\mathbf{Im}(f)$ también satisfacen la propiedad de la media.
- iii) Por último, tomando módulos,

$$|f(a)| = \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + re^{it}) dt \right| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(a + re^{it})| dt.$$

Luego $|f|$ es subarmónica. □

Antes de continuar con las propiedades de las funciones armónicas, presentaremos un teorema importante para las funciones enteras, el cual será de gran utilidad para mostrar otros resultados, este teorema es conocido como el **Teorema de Liouville**.

Teorema 1.1.10. (Teorema de Liouville) Si $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ es entera y acotada, entonces f es constante.

Demostración. Véase [11], Pág 172. □

Proposición 1.1.11. Las funciones armónicas tienen la propiedad de la media.

Demostración. Sea $u \in A(\Omega)$ y $r > 0$ tal que $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$. Tomemos $R > 0$ tal que $\overline{D(a, r)} \subset D(a, R)$. Como $D(a, R)$ es simplemente conexo, u es la parte real de una función analítica en dicho disco, es decir, $u|_{D(a, R)} = \mathbf{Re}(f)$, donde $f \in H(\Omega)$. Como $\mathbf{Re}(f)$ tiene la propiedad de la media, u también la tendrá. \square

Podemos primeramente aplicar el principio del máximo para funciones subarmónicas ya demostradas a las funciones armónicas, que tienen la propiedad de la media y por tanto son subarmónicas.

Proposición 1.1.12. (Principio del máximo) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función subarmónica.

- i. Si u alcanza un máximo absoluto en Ω , entonces u es constante.
- ii. Si $\limsup_{z \rightarrow a} u(z) \leq c$ para cada $a \in \partial_\infty \Omega$, entonces $u(z) < c$ para todo $z \in \Omega$ o bien $u(z) = c$ para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Véase, [16] Pág 95. \square

Para demostrar estos principios para máximos locales en lugar de absolutos debemos probar los siguientes resultados.

Proposición 1.1.13. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto y $u, v \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Si $u|_{D(a, r)} = v|_{D(a, r)}$ para algún disco $D(a, r) \subset \Omega$, entonces $u = v$.

Demostración. Es suficiente probar que si $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$ se anula en $D(a, r)$, entonces es nula. Para probar la proposición bastaría con aplicarlo a $v - u$. Definiremos para ello el conjunto

$$\Lambda = \{z \in \Omega : \exists r_z > 0, u|_{D(z, r_z)} = 0\}.$$

Entonces:

- $\Lambda \neq \emptyset$ ya que $a \in \Lambda$.
- Λ es abierto: Si $a \in \Lambda$, $u|_{D(a, r_a)} = 0$. Para cada $b \in \Lambda$, tomando r_b suficientemente pequeño como para que $D(b, r_b) \subset D(a, r_a)$, tendremos que $u|_{D(b, r_b)} = 0$, es decir, $b \in \Lambda$.
- Λ es cerrado: Tomemos una sucesión de elementos de Λ , $a_n \in \Lambda$, convergiendo a

$a \in \Omega$. Tomamos $D(a, r) \subset \Omega$ y fijamos un N lo suficientemente grande para que $a_N \in D(a, r)$. Entonces, existe una función analítica $f \in H(D(a, r))$ tal que

$$\mathbf{Re}(f) = u \in D(a, r).$$

Por otro lado, existe $R > 0$ tal que $D(a_N, R) \subset \Omega$ y u se anula en dicho disco. Igual que antes, existe $g \in H(D(a_N, R))$ tal que $\mathbf{Re}(g) = u$ en $D(a_N, R)$. Pero entonces

$$0 = \mathbf{Re}(g)|_{D(a_N, R) \cap D(a, r)} = \mathbf{Re}(f)|_{D(a_N, R) \cap D(a, r)},$$

luego $f = ik$ en $D(a_N, R) \cap D(a, r)$, con $k \in \mathbb{R}$ constante. Por el principio de prolongación analítica, $f = ik$ en $D(a, r)$ y por tanto $u = 0$ en $D(a, r)$. Como Ω es conexo, se deduce de lo anterior que $\Lambda = \Omega$ y por tanto $u = 0$. \square

Observación 2. Después de la proposición anterior parece lógico estar tentado a concluir que, como en las funciones analíticas, si u se anula en un conjunto que se acumula, entonces es nula. Sin embargo esto no es cierto, como puede comprobarse con $u(z) = \log|z|$, que se anula en $\{z : |z| = 1\}$.

Podemos finalmente enunciar el principio del máximo para máximos relativos.

Proposición 1.1.14. Dado un abierto conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$ y $u \in A(\Omega)$. Entonces, si u alcanza un máximo relativo en Ω , se tiene que u es constante.

Demostración. Sea $a \in \Omega$ un máximo relativo en u . Entonces existe $r > 0$ tal que a es un máximo absoluto en $D(a, r)$. Por el principio del máximo para máximos absolutos, $u(z)$ es constante en $D(a, r)$ y por ser constante en el disco, $u(z)$ es constante en Ω . \square

Observación 3. Es posible cambiar u por $-u$ en la proposición anterior y los máximos de u serán los mínimos de $-u$. Así, se verifica el principio del mínimo para funciones armónicas.

Corolario 1.1.15. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y acotado y sea $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y con la propiedad de la media (en particular, si u es armónica), entonces

$$\sup\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\} = \sup\{u(z) : z \in \partial\Omega\}.$$

Demostración. Sea $M = \sup\{u(z) : z \in \overline{\Omega}\}$ y $m = \sup\{u(z) : z \in \partial\Omega\}$. Claramente $M \geq m$. Como Ω es acotado, $\partial_\infty\Omega = \partial\Omega$ y aplicando el principio del máximo para funciones armónicas, como $\lim_{z \rightarrow b} u(z) = u(b) \leq m$ para cada $b \in \partial\Omega$ y $z \in \Omega$, obtenemos que $u(z) \leq m$ para cada $z \in \Omega$, es decir, $M \leq m$ y por tanto $M = m$ \square

Corolario 1.1.16. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo acotado y $u, v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y tienen la propiedad de la media en Ω (en particular, si ambas son armónicas) y $u|_{\partial_\infty\Omega} = v|_{\partial_\infty\Omega}$, entonces $u = v$.

Demostración. Como coinciden en la frontera, $(u - v)(z) = 0$ para cada $z \in \partial_\infty\Omega$. Aplicando el principio del máximo, $u(z) - v(z) \leq 0$ para cada $z \in \Omega$. Podemos por otro lado aplicar el mismo procedimiento a la función $(v - u)(z)$ y obtenemos que $v(z) - u(z) \leq 0$ luego $u(z) = v(z)$ para todo $z \in \Omega$. \square

1.2. El Problema de Dirichlet en el disco

Sean Ω un abierto y $\varphi : \partial_\infty\Omega \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. La idea es buscar una función $u : \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_\Omega$ sea armónica y $u|_{\partial_\infty\Omega} = \varphi$. A dicho problema se le llama Problema de Dirichlet para el abierto Ω con la condición de contorno φ . El problema de Dirichlet tiene diversas aplicaciones en la física. El primer ejemplo suele ser la ecuación del calor. Si en una sala bidimensional inicialmente fría se colocan calefactores en algunos puntos de las paredes y se deja pasar suficiente tiempo como para que la temperatura se estabilice, la solución del Problema de Dirichlet nos proporciona la temperatura en cada punto de la habitación. En este caso, la temperatura en cada punto de la pared es la condición de contorno, que depende de los calefactores instalados. Existen otras aplicaciones como el cálculo de potenciales electrostáticos.

Observemos que el último corolario de la sección anterior nos garantiza la unicidad del problema, con lo cual nos ocuparemos únicamente de la existencia. Resolveremos en esta sección el problema de Dirichlet para el disco unidad. Para ello haremos uso del núcleo de Poisson, que introducimos en el siguiente teorema.

Lema 1.2.1. (Lema de Schwarz). Suponga que f es una función analítica en \mathbb{D} que satisface las siguientes condiciones:

1. Si $z \in \mathbb{D}$, entonces $|f(z)| \leq 1$.
2. El cero es un punto fijo de f , es decir, $f(0) = 0$.

Entonces $|f'(0)| \leq 1$ y $|f(z)| \leq |z|$ para todo $z \in \mathbb{D}$. Más aún, si $|f'(0)| = 1$ o si $|f(z)| = |z|$ para algún $z \neq 0$, entonces existe una constante c , con $|c| = 1$, tal que $f(w) = cw$ para todo $w \in \mathbb{D}$.

Demostración. Véase [3], Pág. 130. □

Con el Lema de Schwarz, se pueden verificar algunas propiedades de los mapeos conformes que envían el disco unitario en sí mismo y son caracterizados como sigue

Definición 1.2.1. Sea $\hat{\mathbb{C}}$ el plano complejo extendido. Una transformada de Möbius es una función $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ de la forma

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d},$$

donde a, b, c y d son números complejos, con la propiedad $ad - bc \neq 0$.

En particular, dado $|a| < 1$, se define la transformada de Möbius dada por

$$\varphi_a(z) = \frac{z - a}{1 - \bar{z}a}.$$

Este tipo de transformaciones de Möbius mapea el disco en sí mismo como lo establece la siguiente proposición

Proposición 1.2.2. Si $|a| < 1$, entonces φ_a es un mapeo uno a uno de \mathbb{D} en sí mismo; la inversa de φ_a es φ_{-a} . Más aún, φ_a mapea $\partial\mathbb{D}$ en $\partial\mathbb{D}$, $\varphi_a(a) = 0$, $\varphi'_a(0) = 1 - |a|^2$ y $\varphi'_a(a) = (1 - |a|^2)^{-1}$.

Demostración. Véase [3], pág. 131. □

Teorema 1.2.3. Sea $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Entonces, para cada $z \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) K(e^{it}, z) dt.$$

Donde,

$$K(w, z) = \frac{1 - |z|^2}{|w - z|^2}.$$

Con, $|w| = 1$, $|z| < 1$. K se conoce como núcleo de Poisson.

Demostración. Probaremos primero el teorema en el caso particular en el que exista $R > 1$ tal que $u \in A(D(0, R))$. Para ello, tomaremos un $z \in D$ fijo y llamaremos f a la función analítica en $D(0, R)$ tal que $\operatorname{Re}(f) = u$.

Para cualquier función $F \in H(D(0, R))$ se tiene, por la fórmula integral de Cauchy,

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\mathbb{D}} \frac{F(w)}{w - z} dw = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})}{e^{it} - z} (ie^{it}) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{F(e^{it})}{1 - ze^{-it}} dt.$$

Ahora bien, la función

$$F_z(w) = f(w) \frac{1 - |z|^2}{1 - \bar{z}w},$$

es analítica en $D(0, R)$ por ser el producto de una transformación de Möbius y de f .

Así, podemos aplicarle el resultado anterior y además evaluarla en z para obtener

$$\begin{aligned} f(z) = F_z(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{1 - \bar{z}e^{it}} \frac{1}{1 - ze^{-it}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{1 - ze^{-it}} \frac{1}{1 - ze^{-it}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \frac{1 - |z|^2}{|1 - ze^{-it}|^2} dt. \end{aligned}$$

Luego, tomando partes reales obtenemos directamente la fórmula que buscábamos.

Pasemos ahora a demostrar el teorema en su versión general. Para ello supondremos que $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función continua tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Tomaremos una sucesión r_n de reales positivos con límite 1 y definiremos $v_n(z) = u(r_n z)$. Así definida, $v_n \in A(D(0, \frac{1}{r_n}))$ y por tanto podemos aplicarle la versión particular del teorema, ya demostrada, y obtener que para cada $z \in \mathbb{D}$, se tiene

$$u(r_n z) = v_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r_n e^{i\theta}) K(e^{i\theta}, z) d\theta.$$

Haciendo ahora $n \rightarrow \infty$ se tiene que $u(r_n z) \rightarrow u(z)$ y $u(r_n e^{i\theta}) \rightarrow u(e^{i\theta})$ uniformemente en $\theta \in [0, 2\pi]$. Así, obtenemos finalmente que

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{i\theta}) K(e^{i\theta}, z) d\theta,$$

lo cual finaliza la prueba. \square

Podemos reescribir este último teorema en coordenadas polares, que será más útil para demostrar el problema de Dirichlet.

Corolario 1.2.4. Sea $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Entonces, para cada $z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$, se tiene que

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) P_r(\alpha - t) dt.$$

Donde,

$$P_r(\theta) = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\theta) + r^2}.$$

Con $r \in [0, 1)$. P se conoce como núcleo de Poisson en coordenadas polares.

Demostración. Escribiendo $z = re^{i\alpha}$ con $0 \leq r < 1$, basta con reescribir el núcleo de Poisson como

$$\begin{aligned} K(e^{it}, e^{i\alpha}) &= \frac{1 - r^2}{|e^{it} - re^{i\alpha}|^2} = \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i(\alpha-t)}|^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{|(1 - r \cos(\alpha - t)) - ir \sin(\alpha - t)|^2} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 + r^2 \cos^2(\alpha - t) + r^2 \sin^2(\alpha - t) - 2r \cos(\alpha - t)} \\ &= \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\alpha - t) + r^2}. \end{aligned}$$

\square

Observación 4. El núcleo de Poisson puede expresarse también como

$$P_r(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right).$$

Ya que,

$$\begin{aligned}
 P_r(\theta) = \operatorname{Re} \left(\frac{1 + re^{i\theta}}{1 - re^{i\theta}} \right) &= \operatorname{Re} \frac{(1 + re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})}{(1 - re^{i\theta})(1 - re^{-i\theta})} \\
 &= \frac{\operatorname{Re}(1 + re^{i\theta} - r^2 - re^{-i\theta})}{|1 - re^{i\theta}|^2} \\
 &= \frac{1 - r^2}{|1 - re^{i\theta}|^2}.
 \end{aligned}$$

Es conveniente estudiar ahora algunas propiedades del núcleo de Poisson que serán necesarias en teoremas posteriores.

Proposición 1.2.5. Sea $0 \leq r < 1$, entonces las siguientes afirmaciones para el núcleo de Poisson $P_r(\theta)$, son ciertas.

- i. Si $\theta \in \mathbb{R}$, entonces $P_r(\theta) > 0$ y $P_r(\theta) = P_r(-\theta) = P_r(\theta + 2\pi)$.
- ii. El promedio del núcleo de Poisson es 1, es decir, $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$.
- iii. Si $0 < \alpha \leq |\theta| \leq \pi$, entonces $P_r(\theta) < P_r(\alpha)$.
- iv. Fijado $\alpha \in (0, \pi)$, entonces $\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\theta) = 0$ uniformemente en $\alpha \leq |\theta| \leq \pi$.

Demostración. Probemos cada resultado en el mismo orden en cuál se enuncio.

- i. Es inmediato a partir de la definición ya que $r \in [0, 1)$ y

$$\cos(-\theta) = \cos(\theta) = \cos(\theta + 2\pi).$$

- ii. Basta aplicar la fórmula obtenida en el **Corolario 1.2.2** a la función constante $u = 1$ en $z = 0$ para obtener

$$1 = u(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(-\theta) d\theta = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P_r(\theta) d\theta.$$

- iii. Derivando respecto de θ ,

$$P'_r(\theta) = \frac{-2r \operatorname{sen}(\theta)(1 - r^2)}{(1 - 2r \cos(\theta) + r^2)^2},$$

que es negativo en $[0, \pi]$, con lo cual la función es decreciente en dicho intervalo lo cual demuestra la afirmación para $\theta > 0$. Si θ es negativo basta tener en cuenta que $P_r(\theta) = P_r(-\theta) \leq P_r(\alpha)$.

iv. Fijado $\alpha \in (0, \pi)$, tenemos que $\cos(\alpha) \neq 1$, luego podemos calcular que

$$\lim_{r \rightarrow 1^-} P_r(\alpha) = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos(\alpha) + r^2} = \lim_{r \rightarrow 1^-} \frac{0}{2 - 2 \cos(\alpha)} = 0.$$

□

Una de las condiciones necesarias para que una función sea solución del problema de Dirichlet es que sea armónica.

Proposición 1.2.6. Sea $\varphi : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, para $z = re^{i\alpha} \in \mathbb{D}$,

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) P_r(\alpha - t) dt,$$

es una función armónica en \mathbb{D} .

Demostración. Debemos ver que $f \in H(\mathbb{D})$, donde

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{it}) \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} dt.$$

Para $t \in \mathbb{R}$ y $|z| < 1$, se da la igualdad

$$\begin{aligned} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} &= \frac{1 + ze^{-it}}{1 - ze^{-it}} = (1 + ze^{-it})(1 + ze^{-it} + z^2 e^{-2it} + \dots) \\ &= 1 + 2ze^{-it} + 2z^2 e^{-2it} + 2z^3 e^{-3it} + \dots \end{aligned}$$

donde hemos aplicado la fórmula para la suma de una progresión geométrica. Además, como hemos tomado un $|z| < 1$ fijo, esta expresión converge uniformemente en $[0, 2\pi]$.

Por tanto,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) (1 + 2ze^{-it} + 2z^2 e^{-2it} + \dots) d\theta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) e^{-in\theta} d\theta \right] z^n. \end{aligned}$$

Donde la suma se corresponde al n -ésimo coeficiente de Fourier de φ y además, hay convergencia uniforme. Tenemos, por tanto, que f es una función analítica. □

Podemos al fin encontrar la solución al Problema de Dirichlet en el disco unitario haciendo uso de los teoremas anteriores.

Teorema 1.2.7. (Solución al Problema de Dirichlet en \mathbb{D}). Sea $\varphi : \partial \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces, existe una única función continua $u : \overline{\mathbb{D}} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $u|_{\partial \mathbb{D}} = \varphi$ y $u|_{\mathbb{D}}$ es armónica. Dicha función viene dada mediante la fórmula integral de Poisson:

$$u(re^{i\alpha}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(\alpha - \theta) d\theta, \quad \text{donde } z = re^{i\alpha}.$$

Demostración. La unicidad del problema de Dirichlet en general es consecuencia directa del **Corolario 1.1.15**. Además, sabemos que la función u dada explícitamente en el enunciado es armónica en \mathbb{D} . Definiendo por tanto $u(z) = \varphi(z)$ en la frontera del disco, sólo queda por ver que u es continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Veremos primeramente que $\lim_{z \rightarrow 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$, es decir, que dado $\epsilon > 0$, es posible encontrar cierto $\rho \in (0, 1)$ tal que si $\rho < r < 1$ entonces $|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| < \epsilon$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Sabemos que φ es uniformemente continua, es decir, fijado nuestro $\epsilon > 0$ tomaremos $\delta > 0$ tal que si $|s| < \delta$ entonces $|\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| < \epsilon$ para todo $\theta \in [-\pi, \pi]$.

Por otro lado, por la propiedad cuarta de la **Proposición 1.2.3** podemos tomar r suficientemente cercano a 1 como para que $|P_r(s)| < \epsilon$ si $\delta < |s| \leq \pi$. Además, la periodicidad del núcleo de Poisson y la segunda propiedad de dicha proposición nos garantiza que $\frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} P_r(\theta) d\theta = 1$, para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta estas afirmaciones podemos escribir la siguiente cadena de desigualdades:

$$\begin{aligned}
|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| &= \left| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(e^{is}) P_r(\theta - s) ds - \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(s) ds \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{\theta+\pi}^{\theta-\pi} \varphi(e^{i(\theta-u)}) P_r(u) (-du) - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(s) ds \right| \\
&= \frac{1}{2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i(\theta-s)}) P_r(s) ds - \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(e^{i\theta}) P_r(s) ds \right| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| P_r(s) ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \int_{|s|<\delta} |\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| P_r(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{\delta < |s| \leq \pi} |\varphi(e^{i(\theta-s)}) - \varphi(e^{i\theta})| P_r(s) ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \epsilon \int_{|s| \leq \delta} P_r(s) ds + \frac{1}{2\pi} 2\|\varphi\|_{\infty} \int_{\delta < |s| \leq \pi} P_r(s) ds \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \epsilon \int_{-\pi}^{\pi} P_r(s) ds + \frac{1}{2\pi} 2\|\varphi\|_{\infty} \epsilon 2\pi = \epsilon + 2\|\varphi\|_{\infty} \epsilon.
\end{aligned}$$

Esto demuestra que $\lim_{z \rightarrow 1^-} u(re^{i\theta}) = \varphi(e^{i\theta})$. Haciendo uso de este hecho, demostraremos finalmente que u es continua en cada punto $e^{i\alpha}$. Por un lado, por la continuidad uniforme de φ , dado un $\epsilon > 0$ tomaremos $\eta > 0$ tal que si $|\theta - \alpha| < \eta$, entonces $|\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| < \epsilon$. Por otro lado, tomaremos el ρ que tomamos anteriormente, que cumplía que $|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| < \epsilon$ cuando $\rho < r < 1$ para cualquier $\theta \in [0, 2\pi]$. Llamaremos $V = \{re^{i\theta} : \rho < r \leq 1\}$ que es un entorno de $e^{i\alpha}$ en la topología relativa de \mathbb{D} . Entonces, si $re^{i\theta} \in V$, tenemos que

$$|u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| \leq |u(re^{i\theta}) - \varphi(e^{i\theta})| + |\varphi(e^{i\theta}) - \varphi(e^{i\alpha})| < 2\epsilon.$$

Lo cual prueba finalmente la continuidad de u en la frontera y termina la prueba de que u es la solución al problema de Dirichlet en el disco unitario. \square

Observación 5. Supongamos ahora que la función prescrita φ es continua por partes, pero tiene un número finito de discontinuidades de salto, de modo que en ciertos puntos $\theta \in [0, 2\pi]$, existe el límite izquierdo $\varphi(\theta-)$ y el límite derecho $\varphi(\theta+)$, con $\varphi(\theta-) \neq \varphi(\theta+)$. Entonces la función $u(z)$ dada por la integral de Poisson es armónica en \mathbb{D} y tiene el límite radial

$$\lim_{r \rightarrow 1} u(e^{i\theta}) = \frac{1}{2}(\varphi(\theta-) + \varphi(\theta+)).$$

1.3. Teorema de Montel

En esta sección se enunciará el Teorema de Montel, un importante resultado que se presenta como la primera pieza a la hora de demostrar el Teorema de Riemann. Pero inicialmente se darán ciertas definiciones para entender el enunciado del teorema.

Definición 1.3.1. Dada una familia de funciones $\mathbb{F} \subseteq H(\Omega)$, con $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio.

1. La familia \mathbb{F} es normal si cada sucesión en \mathbb{F} tiene una subsucesión que converge normalmente a una función f en $H(\Omega)$.
2. La familia \mathbb{F} es puntualmente acotada si para cada $z \in \Omega$ el conjunto de valores $\{f(z) : f \in \mathbb{F}\}$ es acotado.
3. La familia \mathbb{F} es localmente acotada si para cada punto $a \in \Omega$ existen constantes M y $r > 0$ tales que $|f(z)| \leq M$, para todo $f \in \mathbb{F}$, y todo $z \in \mathbb{D}(a, r)$.
4. La familia \mathbb{F} se dice uniformemente acotada en \mathbb{D} si existe un número $M > 0$ tal que $|f(z)| \leq M$, para todo $f \in \mathbb{F}$, y todo $z \in \mathbb{D}$.

A partir de las definiciones mencionadas anteriormente, podemos enunciar el teorema principal de esta sección.

Teorema 1.3.1. (Teorema de Montel). Una familia $\mathbb{F} \subseteq H(\Omega)$ es normal si y sólo si \mathbb{F} es localmente acotada.

Demostración. Véase [3], Pág 153. □

1.4. Teorema de Hurwitz

Esta sección está dedicada a otro de los resultados que necesitaremos posteriormente para la prueba del Teorema de Riemann. En este caso, estudiaremos los ceros del límite de una sucesión de funciones.

Definición 1.4.1. Se dice que z_0 es un cero de una función f , si $f(z_0) = 0$. El cero se dice que es aislado si existe algún entorno de z_0 tal que $f(z) \neq 0$, para todo z del entorno, con $z \neq z_0$.

Definición 1.4.2. Se dice que a es un polo de orden $n \geq 0$ de una función f si existe un entorno abierto U de a tal que $f : U - \{a\} \rightarrow \mathbb{C}$ es analítica y el límite

$$\lim_{z \rightarrow a} (z - a)^n f(z),$$

existe y es diferente de 0.

Para los siguientes enunciados y resultados denotaremos por Z_f al número de ceros de una función f y denotaremos por P_f al número de polos de f , ambos contados de acuerdo a sus multiplicidades. Además, diremos que una función f definida en un dominio Ω es meromorfa si P_f es finito en Ω .

Definición 1.4.3. (Curva de Jordan). Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ una función continua. Si $\gamma(a) = \gamma(b)$ y $\gamma(s) \neq \gamma(t)$ para todo $s, t \in (a, b)$ con $s \neq t$, entonces decimos que la función γ es una curva de Jordan.

El término curva de Jordan es, en general, utilizado como una forma corta de referirse a una curva simple, cerrada, suave y orientada positivamente.

Teorema 1.4.1. (Principio del argumento para funciones analíticas). Supongamos que f es una función meromorfa en un abierto Ω . Sea γ una curva de Jordan en Ω tal que la *Imagen* γ no pasa através de ningún cero ni polo de f y tal que el interior de la *Imagen* γ está contenido en Ω . Entonces

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = Z_f - P_f.$$

teniendo en cuenta las multiplicidades de Z_f y P_f .

Demostración. Véase [3] Pág 123. □

Como aplicación directa, se puede ver que si f es analítica en D y continua en \overline{D} , y si lleva a C de una manera que preserve la orientación a una curva de Jordan γ que encierra a un dominio Ω , entonces f mapea a D de forma univalente a Ω . En otras palabras, la univalencia en la frontera implica univalencia en el interior. El siguiente lema presenta de manera más clara lo dicho anteriormente.

Lema 1.4.2. (Principio de univalencia en la frontera). Sea f una función analítica en $\overline{\mathbb{D}}$ e inyectiva en $\partial\mathbb{D}$. Entonces la función f es univalente en \mathbb{D} y envía el disco unitario al dominio interior de la curva cerrada de Jordan $\gamma = f(\partial\mathbb{D})$.

Demostración. Véase [13] , pág. 13. □

La prueba del principio del argumento para funciones analíticas sugiere que la estructura de las funciones armónicas puede permitir pasar de un enfoque elemental a una forma más general del teorema, y este es el caso. Pues ahora el principio del argumento para las funciones armónicas se puede formular como una generalización directa del resultado clásico para las funciones analíticas.

Teorema 1.4.3. (Principio del argumento para funciones armónicas). Sea f una función armónica que preserva la orientación en un dominio de Jordan Ω limitada por C . Suponga que f es continua en $\overline{\Omega}$ y $f(z) \neq 0$ en C . Entonces $\Delta_C \arg f(z) = 2\pi Z_f$, con Z_f contados de acuerdo con la multiplicidad.

Demostración. Véase [6], Pág 9. □

Nota 1.2. $\Delta_C \arg f(z)$ se conoce como la variación del argumento, es decir, el índice o número de vueltas de la curva de *imagen* $f(C)$ sobre el origen.

Como consecuencia del principio del argumento, enunciamos el Teorema de Rouché.

Teorema 1.4.4. (Teorema Rouché). Suponga que f y g son meromorfas en una vecindad de $\overline{D(a; R)}$ sin ceros ni polos en el círculo $\gamma = \partial\overline{D(a; R)}$. Si

$$|f(z) + g(z)| < |f(z)| + |g(z)|,$$

en γ , entonces $Z_f - P_f = Z_g - P_g$, con los Z y los P contados de acuerdo a sus multiplicidades en γ .

Demostración. Véase [3], pág. 125. □

En el Teorema de Rouché, cuando la función es analítica, el número de polos es cero y la conclusión se reduce a afirmar que el número de ceros de las funciones f y g coinciden.

Entre las aplicaciones destacadas del teorema anterior se encuentra el **Teorema de Hurwitz**, el cual junto a sus corolarios son el resultado principal de esta sección, los cuales nos proporcionan algunas propiedades interesantes relacionadas con la convergencia de funciones analíticas.

Teorema 1.4.5. (Teorema de Hurwitz, 1889). Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, (f_n) una sucesión de funciones en $H(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in H(\Omega)$ y $\overline{D(a, r)}$ un disco cerrado tal que $f(z) \neq 0$ para cada $z \in \partial D(a, r)$. Entonces, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > m$, las funciones f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a, r)$ contados según sus multiplicidades.

Demostración. Llamemos $\epsilon = \min\{|f(z)| : z \in \partial D(a, r)\} > 0$. Existe entonces cierto n_ϵ tal que si $n \geq n_\epsilon$, entonces $|f_n(z) - f(z)| < \epsilon \leq |f(z)|$ para todo $z \in \partial D(a, r)$. Podemos aplicar entonces el **Teorema de Rouché, 1.4.2**. Como ninguna de las funciones tiene polos, deducimos de dicho teorema que f_n y f tienen el mismo número de ceros en $D(a, r)$ contados según sus multiplicidades para todo $n > n_\epsilon$, como queríamos ver. \square

Los siguientes corolarios del teorema de Hurwitz serán de gran importancia

Corolario 1.4.6. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones en $H(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in H(\Omega)$. Si f_n no se anula en Ω para ningún $n \in \mathbb{N}$, entonces, o bien f es idénticamente nula o f no tiene ceros en Ω .

Demostración. Supongamos que f no es idénticamente nula. Entonces, si existiera $a \in \Omega$ tal que $f(a) = 0$, f tendría un cero aislado y por tanto existiría cierto disco $\overline{D(a, r)} \subset \Omega$ tal que f no se anula en $\overline{D(a, r)}$. En particular, f no se anula en $\partial D(a, r)$. Aplicando el Teorema de Hurwitz, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que f_m y f tienen el mismo número de ceros en $D(a, r)$, lo cual es absurdo ya que f_m no se anula por hipótesis y f sí lo hace. \square

El siguiente corolario se usará en la prueba del teorema de Riemann.

Corolario 1.4.7. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo y (f_n) una sucesión de funciones inyectivas en $H(\Omega)$ que converge uniformemente sobre compactos hacia $f \in H(\Omega)$. Entonces, o bien f es constante, o bien f es inyectiva.

Demostración. Véase [10], pág. 349. □

1.5. Teorema del mapeo de Riemann

El objetivo de esta sección es enunciar el Teorema de Representación Conforme de Riemann, con el cual, finalizamos el capítulo de preliminares. Este teorema nos indica que todo dominio simplemente conexo y estrictamente contenido en el plano complejo puede ser transformado mediante un mapeo conforme en cualquier otro dominio con las mismas características, en particular, el disco unitario. De esta afirmación se puede concluir que salvo equivalencia conforme existen sólo dos tipos de dominios simplemente conexos en \mathbb{C} , que son \mathbb{D} y el mismo \mathbb{C} . Antes de pasar al Teorema del mapeo de Riemann, enunciaremos el siguiente lema.

Lema 1.5.1. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio tal que toda función analítica no nula en Ω tiene una raíz cuadrada analítica. Si $a \in \Omega$ entonces existe una función analítica f en Ω tal que

- i. $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$,
- ii. La función f es uno a uno,
- iii. La imagen directa de $f(\Omega) = \mathbb{D}$.

Demostración. Véase [15], Pág. 14. □

Teorema 1.5.2. (Teorema del mapeo de Riemann). Sea Ω un dominio simplemente conexo el cual no es todo el plano. Si $a \in \Omega$, entonces existe una única función analítica $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ con las propiedades

- a. $f(a) = 0$ y $f'(a) > 0$,

- b. La función f es uno a uno,
- c. La imagen directa de $f(D) = \mathbb{D}$.

Demostración. Véase [15], Pág. 17. □

Para concluir este capítulo, debemos hacer la observación que entre el problema de Dirichlet y el Teorema de Riemann existe una equivalencia, es decir, que a partir de la solución del problema de Dirichlet en un abierto podemos construir explícitamente el isomorfismo conforme que lo envía al disco unitario, y recíprocamente, si conocemos este isomorfismo conforme podemos resolver el problema de Dirichlet en el abierto siempre y cuando su frontera sea una curva de Jordan.

Capítulo 2

Teorema de Radó-Kneser-Choquet

El presente capítulo es el núcleo central de nuestro trabajo. El objetivo principal de la primera sección de este capítulo es enunciar y demostrar algunos teoremas importantes para llegar a la prueba de nuestro resultado central.

2.1. Propiedades generales de mapeos armónicos

En esta sección se desarrollarán algunas propiedades de los mapeos armónicos, todas provenientes de generalizaciones conocidas de los mapeos conformes. De antemano se dará una discusión preliminar de puntos críticos que nos llevará a una prueba del **Teorema de Lewy**.

Definición 2.1.1. Sea $u = u(x, y)$ una función de valor real, con primeras derivadas parciales continuas en un dominio del plano. Un punto $z_0 = x_0 + iy_0 \in \Omega$ se dice un punto crítico de u , si en ese punto las derivadas parciales se anulan, es decir, $\frac{\partial u}{\partial x}(z_0) = 0$ y $\frac{\partial u}{\partial y}(z_0) = 0$.

Observación 6. Podemos observar que dada una función armónica en un dominio Ω , sus puntos críticos son puntos de sillar. En efecto, si $u = u(x, y)$ una función armónica real-valuada, entonces

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Ahora, si calculamos el determinante de la matriz Hessiana para u , denotado por $H(u)$, se tiene que

$$\begin{aligned} H(u) &= \det \begin{pmatrix} u_{xx} & u_{xy} \\ u_{yx} & u_{yy} \end{pmatrix} = u_{xx}u_{yy} - (u_{xy}u_{yx}) \\ &= u_{xx}u_{yy} - (u_{xy})^2 \\ &= (-u_{yy})u_{yy} - (u_{xy})^2 \\ &= -[(u_{yy})^2 + (u_{xy})^2] < 0. \end{aligned}$$

En particular, para los puntos crítico de u se tiene que $H(u(z)) < 0$. Así, por el criterio de la segunda derivada se verifica lo dicho inicialmente.

Los puntos no críticos se llaman puntos regulares. En general, geoméricamente, se puede decir muy poco sobre la estructura del conjunto de puntos críticos. Puede contener puntos aislados (picos), curvas enteras (crestas horizontales) e incluso conjuntos abiertos (mesetas). Sin embargo, para una función armónica, el conjunto de puntos críticos es siempre discreto, como veremos a continuación.

Teorema 2.1.1. (Principio de ceros aislados) Sea f una función analítica en Ω no idénticamente nula. Entonces, los ceros de f en Ω , si existen, son aislados.

Demostración. Véase [3], Pág 79. □

Teorema 2.1.2. Todos los puntos críticos de una función armónica no constante son aislados.

Demostración. Sea z_0 un punto crítico de u , entonces tenemos por definición que los puntos críticos son aquellos donde,

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0.$$

Pero dado que u es armónica, entonces la función $\frac{\partial u}{\partial z}$ es analítica, y además $\frac{\partial u}{\partial z}(z_0) = 0$, esto implica que z_0 es un cero para la función analítica, luego por el **Teorema 2.1.1**, se tiene que z_0 es un punto aislado para $\frac{\partial u}{\partial z}$ a menos que $\frac{\partial u}{\partial z} \equiv 0$. □

Dado que los puntos críticos de una función armónica son aislados y además son puntos de silla, esto nos lleva a querer conocer la estructura del conjunto de nivel de una función armónica cerca de un punto crítico.

Definición 2.1.2. Sean $u : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y $j \in \mathbb{R}$. Entonces el conjunto denotado por

$$N_j = \{z \in \Omega \subset \mathbb{C} : u(z) = j\} = u^{-1}(\{j\}),$$

es llamado el conjunto de nivel de u . Si $z_0 \in N_{j_0}$ y $\delta > 0$, entonces

$$N_{j_0}(\delta) = N_{j_0} \cap D(z_0, \delta).$$

El siguiente teorema describirá dicha estructura, pues será de gran utilidad para la prueba del Teorema de Lewy y Lema de Heinz.

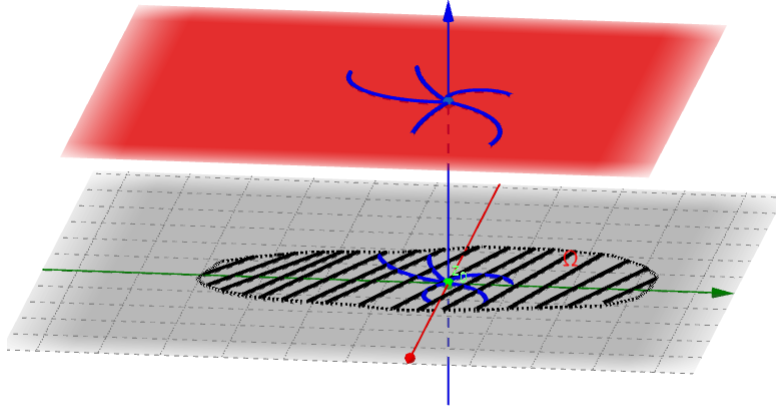


Figura 2.1

Teorema 2.1.3. Sea $u : \Omega \subset \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función armónica no idénticamente nula en un dominio Ω , z_0 es un punto crítico de u y $j_0 = u(z_0)$. Entonces existen $\delta > 0$, $m \geq 2$ y $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ curvas en $D(z_0, \delta)$ tal que $N_{j_0}(\delta) = \bigcup_{k=1}^m \lambda_k$.

Demostración.

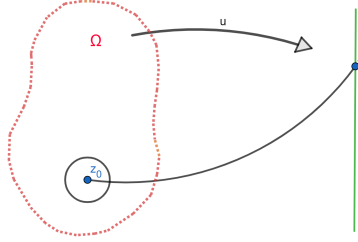


Figura 2.2

Sea z_0 un punto crítico de $u \in A_{\mathbb{R}}(\Omega)$. Dado que z_0 es un punto crítico, entonces por el **Teorema 2.1.2**, se tiene que z_0 es un punto aislado para u . Así, existe $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subseteq \Omega$, donde z_0 es el único punto crítico en $D(z_0, \delta) \subseteq \Omega$ (Véase **Figura 2.2**).

Por otro lado, como $D(z_0, \delta)$ es simplemente conexo, podemos tener una completación analítica de u . Sea $f = u + iv$ dicha completación analítica de u en $D(z_0, \delta)$. Dado que $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$ se anulan en z_0 , se deduce de las ecuaciones de Cauchy-Riemann que $\frac{\partial v}{\partial x}$ y $\frac{\partial v}{\partial y}$ también se anulan allí. Por lo tanto, $f'(z_0) = 0$.

Ahora, sin pérdida de generalidad, supongamos que $f(z_0) = 0$ y que $z_0 = 0$ (Véase **Figura 2.1**). Entonces, cerca del origen, f tiene la forma

$$f(z) = a_m z^m + a_{m+1} z^{m+1} + \cdots, \quad a_m \neq 0,$$

para algún número entero $m \geq 2$. Por lo anterior, podemos reescribir a f como $f(z) = z^m \psi(z)$, donde

$$\psi(z) = a_m + a_{m+1} z + a_{m+2} z^2 + \cdots \neq 0,$$

en alguna vecindad del origen. Tomemos una rama de la raíz m -ésima de la función ψ , para formar la siguiente función

$$\varphi(z) = z[\psi(z)]^{\frac{1}{m}} = c_1 z + c_2 z^2 + \cdots, \quad \text{donde } c_1 = (a_m)^{\frac{1}{m}},$$

que es analítica y univalente cerca del origen. Entonces f tiene la estructura local

$$f(z) = [\varphi(z)]^m.$$

Sea $z_1 \in N_{j_0}(\delta)$, entonces $u(z_1) = 0$. Así, $f(z_1) = iv(z_1)$ y notemos que $v(z_1) \neq 0$, pues z_0 es el único punto crítico en $D(z_0, \delta)$, entonces $f(z_1)$ es un imaginario puro. En otras palabras, $z_1 \in N_{j_0}(\delta)$ sí y sólo si $f(z_1) \in i\mathbb{R}$. Más aún, podemos escribir el conjunto de nivel de la siguiente forma

$$\begin{aligned} N_{j_0}(\delta) &= \{z \in D : f(z) = ir; r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z \in D : (\varphi(z))^m = ir; r \in \mathbb{R}\} \\ &= \left\{z \in D : \text{Arg}\{(\varphi(z))^m\} = \frac{\pi}{2}\right\} \cup \left\{z \in D : \text{Arg}\{(\varphi(z))^m\} = -\frac{\pi}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Ahora, si consideramos $\theta = \text{Arg}\{\varphi(z)\}$, entonces tenemos que

$$m\theta = \text{Arg}\{(\varphi(z))^m\} = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

Esto implica,

$$\theta \in \left\{\theta_k : \theta_k = \left(\frac{4k+1}{2m}\right)\pi \quad ; \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}\right\}.$$

Al considerar el caso $-\frac{\pi}{2}$, se tiene un resultado análogo, como sigue

$$\theta \in \left\{\theta_{-k} : \theta_{-k} = \left(\frac{4k-1}{2m}\right)\pi \quad ; \quad k \in \{0, 1, 2, \dots, m-1\}\right\}.$$

Así, $\varphi(z)$ se encuentra en un sistema de m líneas que pasan por el origen y $2m$ rayos que se intersecan formando ángulos iguales a $\frac{\pi}{m}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} \left\{z \in D : \text{Arg}\{(\varphi(z))^m\} = \frac{\pi}{2}\right\} &= \bigcup_{k=0}^{m-1} \{z \in D : \text{Arg}(\varphi(z)) = \theta_k\}, \\ \left\{z \in D : \text{Arg}\{(\varphi(z))^m\} = -\frac{\pi}{2}\right\} &= \bigcup_{k=0}^{m-1} \{z \in D : \text{Arg}(\varphi(z)) = \theta_{-k}\}. \end{aligned}$$

Además, tenemos que φ es localmente univalente y $\varphi(0) = 0$, es decir, φ conserva ángulos, lo cual nos permite definir las siguientes curvas

$$\gamma_k = \{z \in D : \text{Arg}(\varphi(z)) = \theta_k\} \quad \text{y} \quad \gamma_{-k} = \{z \in D : \text{Arg}(\varphi(z)) = \theta_{-k}\}.$$

Esto nos lleva a reescribir el conjunto de nivel de la siguiente manera

$$\begin{aligned} N_{j_0}(\delta) &= \bigcup_{k=0}^{m-1} \{z \in D : \text{Arg}(\varphi(z)) = \theta_k\} \cup \bigcup_{k=0}^{m-1} \{z \in D : \text{Arg}(\varphi(z)) = \theta_{-k}\} \\ &= \left[\bigcup_{k=0}^{m-1} \gamma_k\right] \cup \left[\bigcup_{k=0}^{m-1} \gamma_{-k}\right] \\ &= \bigcup_{k=0}^{m-1} (\gamma_k \cup \gamma_{-k}). \end{aligned}$$

Ahora, tomando a $\gamma_k \cup \gamma_{-k} = \lambda_k$, tenemos que

$$N_{j_0}(\delta) = \bigcup_{k=0}^{m-1} \lambda_k.$$

Por tanto, el conjunto de nivel de una función armónica sobre un punto crítico, es la unión de curvas que se intersecan en dicho punto.

Ahora, vimos que si $f(0) = 0$, entonces el teorema se cumple. Para el caso general, es suficiente tomar la función

$$\widehat{f}(z) = f(z_0 - z) - w_0, \quad \text{con} \quad f(z_0) = w_0.$$

La función dada para el caso general, no es más que una traslación de puntos sobre el plano. \square

Observación 7. Si z_0 es un punto regular de u y f es la completación analítica de u , entonces $f'(z_0) \neq 0$. Así, por el teorema de la función inversa tenemos que f es localmente univalente cerca de z_0 . Luego, queda claro que el conjunto de nivel de u cerca de un punto regular es localmente un único arco analítico.

2.2. Teorema de Lewy

De acuerdo con el Teorema de la Función inversa, una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de clase C^1 es localmente invertible si su Jacobiano no se anula [14]. Sin embargo, la no anulación del Jacobiano, en general no es necesaria para invertibilidad local, por ejemplo, la función elemental

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

es inyectiva y sin embargo su Jacobiano se anula en el origen. Para una función analítica f , es bien sabido que la condición $f'(z_0) \neq 0$ es suficiente y necesaria para univalencia local en z_0 [10] Véase, Pág 347. Más aun, el Jacobiano para funciones analíticas está dado por $J_f(z) = |f'(z)|^2$, lo cual nos dice que el Jacobiano de una función analítica localmente univalente no puede ser nula en ningún momento.

Ahora, el mismo principio sigue siendo válido para funciones armónicas en el plano y es conocido como el **Teorema de Lewy**, el cual se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 2.2.1. (Teorema de Lewy) Si f es una función armónica complejo-valuada que es localmente univalente en un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$, entonces su Jacobiano no se anula, es decir, $J_f(z) \neq 0$, para todo $z \in \Omega$.

Demostración. Sea $f = u + iv$ una función armónica complejo-valuada, razonemos por reducción al absurdo, es decir, supongamos que $J_f(z_0) = 0$ para algún punto $z_0 \in \Omega$. Esto significa que la matriz.

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix},$$

tiene un determinante que se anula en z_0 , por lo que el sistema homogéneo de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} au_x + bv_x = 0; \\ au_y + bv_y = 0, \end{cases}$$

tiene una solución no trivial $(a_0, b_0) \neq (0, 0)$, supongamos que $a_0 \neq 0$. Así la función armónica de valor real $\psi(z) = a_0 u(z) + b_0 v(z)$ tiene un punto crítico en z_0 , es decir, podemos escojer un $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$ y $\psi'(z) \neq 0$, para todo z del entorno con $z \neq z_0$. Sin pérdida de generalidad, asumamos que $f(z_0) = 0$ y consideremos el siguiente conjunto de nivel cerca del punto z_0 ,

$$N_0(\delta) = \{z \in \Omega \subset \mathbb{C} : \psi(z) = 0\}.$$

Por el **Teorema 2.1.2**, este conjunto de nivel consta localmente de cuatro o más arcos distintos que se cruzan con ángulos iguales en z_0 . Note que,

$$\begin{aligned} f(N_0(\delta)) &= \{w = \alpha + i\beta : a_0\alpha + b_0\beta = 0\} \\ &= \left\{ w = \left(-\frac{b_0}{a_0} + i \right) \beta : \beta \in (-r, r) \right\}. \end{aligned}$$

Donde, $(-r, r)$ es un intervalo real. Luego, esto implica que f envía todos los arcos de N_0 a la línea

$$\left\{ w = \left(-\frac{b_0}{a_0} + i \right) \beta : \beta \in (-r, r) \right\}.$$

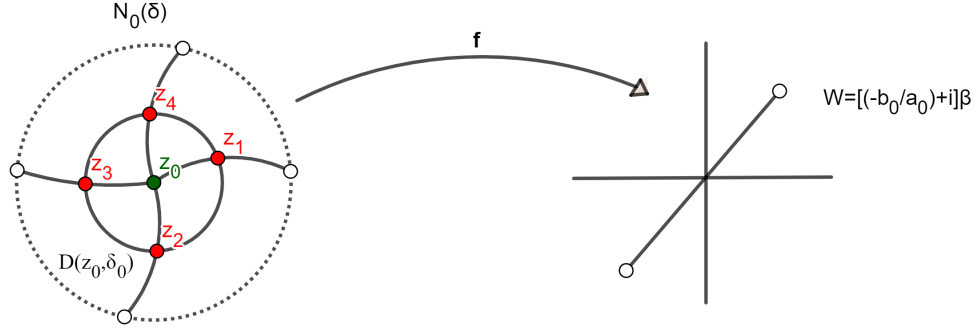


Figura 2.3

Sea $\delta_0 < \delta$ tal que $D(z_0, \delta_0) \subset D(z_0, \delta)$. Sin pérdida de generalidad, consideremos el caso para dos curvas o equivalentemente cuatro arcos.

Dado que $\partial D(z_0, \delta_0)$ corta a $N_0(\delta)$, digamos en los puntos z_1, z_2, z_3 y z_4 (Véase **Figura 2.3**). Entonces, podemos definir a γ_1 como la curva simple que va de z_1 a z_3 y γ_2 como la curva simple que va de z_2 a z_4 , es decir,

$$\gamma_1 : [0, 1] \longrightarrow N_0(\delta); \quad \gamma_1(0) = z_1 \quad \text{y} \quad \gamma_1(1) = z_3.$$

$$\gamma_2 : [0, 1] \longrightarrow N_0(\delta); \quad \gamma_2(0) = z_2 \quad \text{y} \quad \gamma_2(1) = z_4.$$

Así, podemos definir las funciones $h_k : [0, 1] \longrightarrow (-r, r)$, con $k = 1, 2$. Dadas por,

$$h_k(t) = \beta_k(t) = \frac{f(\gamma_k(t))}{\xi_0}, \quad \text{con} \quad \xi_0 = \left(-\frac{b_0}{a_0} + i \right).$$

Para tener una idea más general de la construcción que se está realizando, veamos el siguiente gráfico

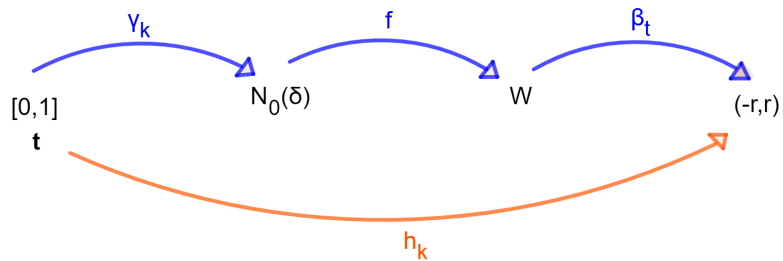


Figura 2.4

Más aún, podemos tomar

$$\begin{aligned} h_1(0) &= q_1; & h_1(1) &= q_3 \\ h_2(0) &= q_2; & h_2(1) &= q_4. \end{aligned}$$

Ahora, dado que γ_1, γ_2 y f son continuas, entonces h_1 y h_2 son continuas en $[0, 1]$.

Por otro lado, tenemos que $z_0 \in \gamma_1, \gamma_2$ (Véase **Figura 2.4**), es decir, existen $t_0, t_0^* \in (0, 1)$ tal que

$$f(\gamma_1(t_0)) = f(\gamma_2(t_0^*)) = f(z_0) = 0.$$

Esto es, que el cero está entre q_1 y q_3 y entre q_2 y q_4 , además contamos con 16 configuraciones para las posiciones de los cuatro puntos q_1, q_2, q_3, q_4 . Sin pérdida de generalidad consideremos el caso para $q_2 \in (q_1, q_3)$. Luego, por el Teorema del valor intermedio, tenemos que existe $t^* \in (0, 1)$ tal que $h_1(t^*) = q_2$, lo cual es equivalente a decir que,

$$f(\gamma_1(t^*)) = f(\gamma_2(0)).$$

Esto implica que,

$$f(z^*) = f(z_2), \quad \text{con} \quad \gamma_1(t^*) = z^*.$$

Pero, tenemos que $z^* \neq z_2$, lo cual contradice la univalencia de f . Esta contradicción partió de suponer que su Jacobiano se anulaba en algún z_0 . Por tanto, se tiene que $J_f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. \square

2.3. Lema de Heinz

Ahora, para continuar con nuestra contrucción, pasamos a un resultado básico de los mapeos armónicos en el disco, el cual es llamado el **Lema de Heinz**.

Lema 2.3.1. (Lema de Heinz) Sea f un mapeo armónico del disco unitario a él mismo, con $f(0) = 0$. Entonces

$$|f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2 \geq c.$$

Para alguna constante absoluta $c > 0$.

Demostración. Supongamos que f se extiende a un homeomorfismo de \mathbb{D} sobre sí mismo, es decir, consideremos

$$f : \overline{\mathbb{D}} \longrightarrow \overline{\mathbb{D}}, \quad \text{con} \quad f(\partial \mathbb{D}) = \partial \mathbb{D}.$$

Sin pérdida de generalidad asumamos que f preserva la orientación (de lo contrario tome conjugada). Bajo estos supuestos, está claro que f tiene una representación de Poisson:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} f(e^{it}) dt,$$

donde $f(e^{it}) = e^{i\theta(t)}$ y $\theta(t)$ es continua y estrictamente creciente en el intervalo $[0, 2\pi]$, con $\theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi$. En notación estándar, f tiene la expansión

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n z^n + \overline{b_n} \overline{z}^n), \quad a_1 = f_z(0) \quad \text{y} \quad b_1 = f_{\overline{z}}(0).$$

El núcleo de Poisson es

$$\frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} = \operatorname{Re} \left\{ \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \right\} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (e^{-int} z^n + e^{int} \overline{z}^n).$$

Por lo tanto, la representación de Poisson proporciona las fórmulas.

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{i\theta(t)} dt, \quad b_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{-i\theta(t)} dt.$$

Ahora, integrando por partes a a_n con:

$$\begin{aligned} u &= e^{i\theta(t)}; & du &= ie^{i\theta(t)} d\theta(t), \\ dv &= e^{-int} dt; & v &= \frac{-1}{in} e^{-int} + C, \end{aligned}$$

tenemos que la integral será

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{i\theta(t)} dt &= \frac{-1}{in} e^{-int} e^{i\theta(t)} \Big|_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} \frac{1}{in} e^{-int} ie^{i\theta(t)} d\theta(t) \\ &= \frac{-1}{in} [e^{-in2\pi} e^{i\theta(2\pi)} - e^{-in0} e^{i\theta(0)}] + \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} e^{-int} e^{i\theta(t)} d\theta(t) \\ &= \frac{-1}{in} [e^{i\theta(2\pi)} - e^{i\theta(0)}] + \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} e^{-int} e^{i\theta(t)} d\theta(t) \\ &= \frac{-1}{in} [e^{i(2\pi+\theta(0))} - e^{i\theta(0)}] + \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} e^{-int} e^{i\theta(t)} d\theta(t) \\ &= \frac{-e^{\theta(0)}}{in} [e^{2\pi i} - 1] + \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} e^{-int} e^{i\theta(t)} d\theta(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{n} e^{-int} e^{i\theta(t)} d\theta(t). \end{aligned}$$

Para el caso de b_n , se hace de forma similar. Entonces, las integrales por partes quedan de las siguientes formas:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{i\theta(t)} d\theta(t), \\ b_n &= -\frac{1}{2\pi n} \int_0^{2\pi} e^{-int} e^{-i\theta(t)} d\theta(t). \end{aligned}$$

Por otro lado, se deduce de la relación de Parseval que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt = 1.$$

Así, solo falta verificar que

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq 1 - c, \quad \text{con } c \in (0, 1).$$

Ahora, se tomarán las fórmulas de a_n y b_n para obtener una mejor estimación de $|a_n|^2 + |b_n|^2$. Un cálculo corto conduce a la expresión

$$\begin{aligned} 2\pi^2 n^2 (|a_n|^2 + |b_n|^2) &= \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos[n(s-t)] \cos[\theta(s) - \theta(t)] d\theta(s) d\theta(t) \\ &\leq \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} |\cos[\theta(s) - \theta(t)]| d\theta(s) d\theta(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\int_{-\theta(t)}^{2\pi-\theta(t)} |\cos(\theta)| d\theta \right] d\theta(t) \\ &= \int_0^{2\pi} \left[4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta) d\theta \right] d\theta(t) = \int_0^{2\pi} [4] d\theta(t) = 8\pi. \end{aligned}$$

Aplicando esta estimación, uno encuentra que

$$\sum_{n=2}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq \frac{4}{\pi} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{\pi},$$

luego, tenemos que $c = 1 - \frac{2\pi}{3} + \frac{4}{\pi} = 0,1778\dots$

Por tanto, aplicando la identidad de Parseval tenemos

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) = |a_1|^2 + |b_1|^2 + \sum_{n=2}^{\infty} (|a_n|^2 + |b_n|^2) \leq |a_1|^2 + |b_1|^2 + 1 - c.$$

Lo cual implica que,

$$1 - 1 + c \leq |a_1|^2 + |b_1|^2 = |f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2.$$

Ahora, para el caso que $f : \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{D}$: tome $0 < r < 1$, y sea $D_r \subset \mathbb{D}$ la preimagen bajo f del disco $|w| < r$. También, sea φ el mapeo conforme de \mathbb{D} sobre D_r con $\varphi(0) = 0$. Entonces, $g = \frac{1}{r}f \circ \varphi$ mapea a \mathbb{D} armónicamente sobre sí mismo con $g(0) = 0$ (ya que $f(0) = 0$), y g se extiende homeomórficamente hasta la clausura de \mathbb{D} . Pero

$$g_z(0) = \frac{1}{r}f_z(0)\varphi'(0) \quad \text{y} \quad g_{\bar{z}}(0) = \frac{1}{r}f_{\bar{z}}(0)\overline{\varphi'(0)},$$

entonces, si se puede demostrar que $|g_z(0)|^2 + |g_{\bar{z}}(0)|^2 \geq c$, la desigualdad deseada $|f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2 \geq c$ seguirá dado que r tiende a uno, porque el Lema de Schwarz (**Lema 1.2.1**) da que $|\varphi'(0)| \leq 1$. \square

Observación 8. Nos referimos a c como constante absoluta, a él valor que funciona para cualquier función armónica que mapea el disco unitario sobre sí mismo y mantenga fijo el cero, en pocas palabras c no depende de la función.

2.4. Teorema de Radó

En esta sección enunciamos y demostraremos el Teorema de Radó, el cual es una más de las propiedades de mapeos armónicos, pero antes veamos una idea previa.

Es bien sabido que los únicos mapeos conformes de todo el plano complejo \mathbb{C} sobre sí mismos son los de la forma $f(z) = \alpha z + \beta$, donde α y β son constantes complejas. Una prueba rápida usa el Teorema de Picard, que dice bajo qué condiciones puede asegurarse la existencia y unicidad de solución de una EDO en un problema de Cauchy, para mostrar que f no puede tener una singularidad esencial infinita; por lo tanto, f es un polinomio, que debe ser de primer grado si es univalente en el plano. El siguiente teorema extiende el resultado a mapeos armónicos.

Teorema 2.4.1. Los únicos mapeos armónicos localmente univalentes de \mathbb{C} sobre \mathbb{C} son las asignaciones afines $f(z) = \alpha z + \kappa + \beta \bar{z}$, donde α , β y κ son constantes complejas y $|\alpha| \neq |\beta|$.

Demostración. Sea $f = h + \bar{g}$ un mapeo armónico localmente univalente de \mathbb{C} en \mathbb{C} , entonces por el Teorema de Lewy (**Teorema 2.2.1**), se tiene que $J_f(z) \neq 0$. Así,

puede darse uno de los siguientes casos:

$$J_f(z) > 0 \quad \text{ó} \quad J_f(z) < 0.$$

Sin pérdida de generalidad, supongamos que f preserva la orientación, es decir,

$$J_f(z) = |h'(z)| - |g'(z)| > 0.$$

Esto significa que $|g'(z)| < |h'(z)|$ o de forma equivalente $|\frac{g'(z)}{h'(z)}| < 1$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

En consecuencia, por el teorema de Liouville (**Teorema 1.1.10**), $\frac{g'(z)}{h'(z)} \equiv b$ para alguna constante compleja b con $|b| < 1$. Entonces, integrando lo anterior obtenemos

$$g(z) = bh(z) + c,$$

donde c es una constante compleja. Por lo tanto, f tiene la forma

$$f = h + \bar{c} + \bar{b}h = F \circ h,$$

donde $F = z + \bar{a} + \bar{b}z$ es un mapeo afín el cual es invertible. Entonces, se deduce que $h = F^{-1} \circ f$ mapea \mathbb{C} univalentemente en \mathbb{C} . Pero h es analítica, por lo que debe tener la forma $h(z) = \alpha z + \beta$ para algunas constantes complejas α y β . Esto muestra que f es un mapeo afín. \square

La prueba muestra que los únicos mapeos armónicos localmente univalentes del plano en sí mismo son las funciones afines, que en realidad envían el plano sobre sí mismo. En otras palabras, no existe un mapeo armónico del plano en un subdominio propio. En particular, ninguna función armónica puede mapear \mathbb{C} de forma univalente en \mathbb{D} , un hecho que también se desprende del teorema de Liouville.

En la dirección opuesta, se ve fácilmente que ninguna función analítica puede mapear a \mathbb{D} de manera univalente en \mathbb{C} . De hecho, el inverso de tal mapeo sería analítico y acotado en \mathbb{C} y, por lo tanto, constante. Este argumento no se aplica a los mapeos armónicos, ya que el inverso no necesita ser armónico. Sin embargo, el resultado se extiende a los mapeos armónicos.

Teorema 2.4.2. (Teorema de Radó) No existe un mapeo armónico localmente univalente de \mathbb{D} sobre \mathbb{C} .

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que f mapea a \mathbb{D} univalentemente en \mathbb{C} y sea $R > 0$. Ahora, sin pérdida de generalidad supongamos que

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad \Delta_R = \{w \in \mathbb{C} : |w| < R\}.$$

Luego, denotemos por D_R el subdominio de \mathbb{D} para el cual $f(D_R) = \Delta_R$. Sea φ el mapeo conforme de \mathbb{D} sobre D_R con $\varphi(0) = 0$. Entonces, $F = \frac{1}{R}f \circ \varphi$ mapea armónicamente a \mathbb{D} sobre él mismo, con $F(0) = 0$, entonces por el lema de Heinz (**Lema 2.3.1**) tenemos que

$$|F_\zeta(0)|^2 + |F_{\bar{\zeta}}(0)|^2 \geq c > 0,$$

donde c es una constante absoluta. Calculando $F_\zeta(0)$ y $F_{\bar{\zeta}}(0)$, obtenemos

$$F_\zeta(0) = \frac{1}{R}f_z(0)\varphi'(0); \quad F_{\bar{\zeta}}(0) = \frac{1}{R}f_{\bar{z}}(0)\overline{\varphi'(0)}.$$

Además, dado que $|\varphi(0)| \leq 1$, entonces por el lema de Schwarz (**Lema 1.2.1**) se tiene que,

$$|\varphi'(0)| \leq 1 \quad \text{y} \quad |\overline{\varphi'(0)}| \leq 1.$$

Así, obtenemos que

$$cR^2 \leq |f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2.$$

lo cual es equivalente a

$$R < \sqrt{\frac{|f_z(0)|^2 + |f_{\bar{z}}(0)|^2}{c}} \quad (2.1)$$

Así, de (2.1) obtenemos una contradicción, ya que R fue tomado arbitrario. Por tanto no existe un mapeo armónico localmente univalente de \mathbb{D} sobre \mathbb{C} \square

Una consecuencia inmediata del teorema de Radó es el siguiente resultado.

Lema 2.4.3. Ningún subdominio convexo propio del plano puede mapearse armónicamente (univalentemente) en todo el plano.

Demostración. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que existe un mapeo armónico localmente univalente f de algún dominio simplemente conexo $\Omega \neq \mathbb{C}$ sobre \mathbb{C} . Según el teorema del mapeo de Riemann (**Teorema 1.5.2**), existe un único

mapeo conforme φ de \mathbb{D} sobre Ω . Por lo tanto, la composición $f \circ \varphi$ mapea a \mathbb{D} armónicamente (univalentemente) en \mathbb{C} , lo cual es una contradicción para el Teorema de Radó. \square

2.5. Teorema de Radó-Kneser-Choquet

En esta sección enunciaremos y demostraremos nuestro resultado principal, luego daremos algunas consecuencias como resultado inmediato de nuestro teorema.

Teorema 2.5.1. (Teorema de Radó-Kneser-Choquet forma básica) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio convexo acotado, cuya frontera es una curva de Jordan γ y sea φ un homeomorfismo de $\partial\mathbb{D}$ en γ . Entonces su extensión armónica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \varphi(e^{it}) dt$$

mapea a \mathbb{D} univalentemente en Ω .

Demostración. Observe que debido a la **Proposición 1.2.4**, inciso i) y ii), el núcleo de Poisson es positivo y su integral es 1. Entonces, el punto $f(z)$ es un promedio ponderado de puntos $\varphi(e^{it})$ distribuidos continuamente alrededor de la frontera del dominio convexo Ω , por lo que $f(z)$ debe estar en Ω para cada z en \mathbb{D} . Luego, por el Problema de Dirichlet la función f es armónica en \mathbb{D} y continua en $\overline{\mathbb{D}}$, con función límite

$$\widehat{f}(\zeta) = \lim_{z \rightarrow \zeta} f(z) = \varphi(\zeta), \quad \zeta \in \partial\mathbb{D}.$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que la función límite prescrita preserva la orientación, es decir, $\varphi(e^{it})$ corre al rededor de γ en la dirección positiva (en sentido antihorario) a medida que t aumenta. (De lo contrario, tomemos conjugados complejos).

Ahora, veamos que f es localmente univalente en \mathbb{D} o, de manera equivalente la no anulación de su Jacobiano. Razonemos por reducción al absurdo. Supongamos que el Jacobiano de f se anula en algún punto z_0 en \mathbb{D} , de modo que la matriz

$$\begin{pmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{pmatrix}$$

tiene un determinante que se anula en z_0 . Como en la prueba del Teorema de Lewy (**Teorema 2.2.1**), se deduce que f mapea el conjunto de nivel

$$N_c(\delta) = \{z \in \mathbb{D} : \psi(z) = c\},$$

cerca de z_0 a la línea

$$\left\{ w = \left(\frac{c - b_0}{a_0} + i \right) \beta : \beta \in (-r, r) \right\}.$$

Entonces, podemos ver que $f(N_c(\delta))$ es la intersección de Ω con la línea $a_0u + b_0v = c$, cerca del punto crítico z_0 .

Por otro lado, ninguna de las curvas simples de $N_c(\delta)$ que se extienden desde z_0 puede intersectarse en otro punto de \mathbb{D} o en $\partial\mathbb{D}$, ya que dicha intersección implicaría la existencia de una curva de Jordan γ_0 en la que $\psi(z) = c$, y entonces por el principio del máximo para funciones armónicas (**Proposición 1.1.12**), se sigue que $\psi(z) = c$ en todas partes dentro de γ_0 . Más aun, por el principio de indentidad para funciones armónicas (**Proposición 1.1.13**), esto implicaría que $\psi(z) = c$ a lo largo de \mathbb{D} . En otras palabras, implicaría que $f(\mathbb{D})$ se encuentra en una línea, lo cual claramente no es el caso. Por lo tanto, ningún par de los arcos de $N_c(\delta)$ que emanan de z_0 puede volver a unirse en otra parte de $\overline{\mathbb{D}}$, lo que significa que $N_c(\delta)$ debe encontrarse con $\partial\mathbb{D}$ en al menos cuatro puntos distintos.

Ahora, como f mapea a $N_c(\delta)$ a la línea $a_0u + b_0v = c$, que cumple con γ exactamente en dos puntos debido a que Ω es convexo. Por lo tanto, f debe mapear cuatro o más puntos en $\partial\mathbb{D}$ en un máximo de dos puntos en γ , lo cual es una contradicción con la hipótesis de que f mapea la $\partial\mathbb{D}$ de manera univalente en γ . Esta contradicción demuestra que el jacobiano de f no puede anularse en \mathbb{D} , entonces f es localmente univalente.

Ahora, veamos la univalencia global a partir del principio del argumento para funciones armónicas (**Teorema 1.4.3**). Dado que f es localmente univalente y su función límite \widehat{f} preserva la orientación, se deduce que f es una función armónica que preserva la orientación en todo \mathbb{D} . Ahora, si f no es univalente entonces hay dos puntos z_1 y z_2 en \mathbb{D} de modo que $f(z_1) = f(z_2)$. Sin embargo, eso implicaría que la función

$f(z) - f(z_1)$ tiene dos ceros en \mathbb{D} , de modo que el número de vueltas de $f(z) - f(z_1)$ sobre el origen es 2, lo que contradice las hipótesis sobre el correspondencia entre $\partial\mathbb{D}$ y γ . Esto completa la prueba. \square

Ahora, mostraremos la prueba dada por Choquet, la cual permite dar una versión más general del **Teorema de Radó-Kneser-Choquet**, pues el argumento dado por Choquet es más analítico y el presentado por Kneser tiende a ser más geométrico. Choquet comienza observando, como Kneser, que para establecer la univalencia local de f en \mathbb{D} basta suponer que la anulación del jacobiano de $f = u + iv$ en algún punto z_0 en \mathbb{D} implicaría que alguna combinación lineal $\psi = au + bv$ tiene un punto crítico en z_0 . Pero Choquet apela al siguiente lema para llegar a una contradicción.

Lema 2.5.2. Sean ψ una función armónica de valor real en \mathbb{D} y continua en $\overline{\mathbb{D}}$. Si ψ es como máximo bivalente en $\partial\mathbb{D}$, entonces ψ no tiene puntos críticos en \mathbb{D} .

Entiéndase por decir que ψ es como máximo bivalente en $\partial\mathbb{D}$, a que ψ toma cualquier valor dado como máximo dos veces en $\partial\mathbb{D}$, es decir, que puede haber $z_1 \neq z_2$ tal que $f(z_1) = f(z_2)$, pero que si $f(z_1) = f(z_2) = f(z_3)$, entonces al menos dos de z_1, z_2, z_3 deben ser iguales.

Demostración. (Prueba del lema 2.5.2) Para mostrar que ψ no tiene puntos críticos en \mathbb{D} , debemos probar que $\frac{\partial\psi}{\partial z} \neq 0$ en \mathbb{D} . Esto es equivalente a decir que

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial\psi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial y} \right) \neq 0,$$

en este punto simplificaremos la prueba, notando que $\psi_z(0) \neq 0$, y afirmamos que es suficiente. De hecho, si z_0 , es algún otro punto en \mathbb{D} , consideremos la función

$$\phi(z) = \frac{z_0 - z}{1 - \overline{z_0}z},$$

que es un mapeo conforme en \mathbb{D} con $\phi(0) = z_0$, y consideremos la composición

$$F(\zeta) = \psi(\phi(\zeta)),$$

la cual es armónica en \mathbb{D} , continua en $\overline{\mathbb{D}}$, y como máximo bivalente en $\partial\mathbb{D}$.

Ahora, aplicando la regla de la cadena a $F(\zeta)$ obtenemos que

$$F_\zeta(\zeta) = \psi_z(\phi(\zeta))\phi'(\zeta),$$

ya que ϕ es analítica y por lo tanto tiene $\phi_{\bar{\zeta}} = 0$. Al evaluar cero en F_ζ se obtiene

$$F_\zeta(0) = \psi_z(z_0)\phi'(0),$$

lo que implica que si $F_\zeta(0) \neq 0$, entonces $\psi_z(0) \neq 0$. Así, una vez demostrado que $\psi_z(0) \neq 0$, podremos generalizar a $\psi_z(z_0) \neq 0$ para todo z_0 en \mathbb{D} .

Ahora, usamos la fórmula de la integral de Poisson para demostrar que $\psi_z(0) \neq 0$. Sustituyendo en ψ (ó $\hat{\psi}(e^{it}) = \lim_{r \rightarrow 1} \psi(re^{it})$ en $\partial\mathbb{D}$) da

$$\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \hat{\psi}(e^{it}) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - z\bar{z}}{(e^{it} - z)(e^{-it} - \bar{z})} \hat{\psi}(e^{it}) dt. \end{aligned}$$

Cuando derivamos ambos lados con respecto a z , la integral depende solo de t , por lo que solo nos queda diferenciar el integrando. Al hacer esto, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(\hat{\psi}(e^{it}) \frac{1 - z\bar{z}}{(e^{it} - z)(e^{-it} - \bar{z})} \right) &= \frac{\hat{\psi}(e^{it})}{e^{-it} - \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1 - z\bar{z}}{e^{it} - z} \right) \\ &= \left(\frac{\hat{\psi}(e^{it})}{e^{-it} - \bar{z}} \right) \left(\frac{e^{it}(e^{-it} - \bar{z})}{(e^{it} - z)^2} \right) \\ &= \hat{\psi}(e^{it}) \left(\frac{e^{it}}{(e^{it} - z)^2} \right), \end{aligned}$$

lo que conduce a la conclusión de que

$$\psi_z(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\psi}(e^{it}) e^{-it} dt.$$

Por otro lado, la hipótesis de bivalencia dice que $\psi(e^{it})$ solo puede tener un máximo local y un mínimo local en la $\partial\mathbb{D}$, y que $\psi(e^{it})$ es monótona en cada uno de los arcos que unen esos puntos. Luego, $\psi(e^{it})$ aumenta de un mínimo en $e^{-i\alpha}$ a un máximo en $e^{i\alpha}$, luego disminuye nuevamente a su mínimo en $e^{-i\alpha}$ ya que e^{it} corre alrededor de la $\partial\mathbb{D}$, sin tener ningún otro extremo local.

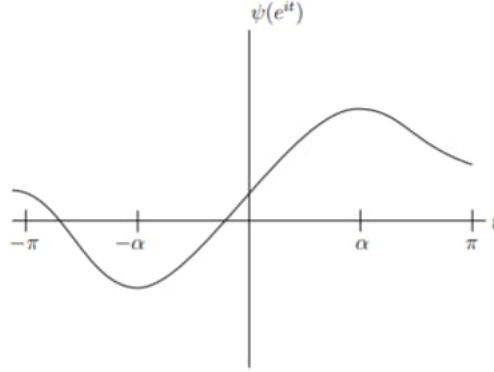


Figura 2.5

Entonces,

$$\psi(e^{it}) - \psi(e^{-it}) > 0, \quad \text{con } t \in (0, \pi).$$

Así,

$$\begin{aligned} \mathbf{Im}(\psi_z(0)) &= \mathbf{Im} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\psi}(e^{it}) e^{-it} dt \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \hat{\psi}(e^{it}) \sin(t) dt \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} \hat{\psi}(e^{it}) \sin(t) dt + \int_{-\pi}^0 \hat{\psi}(e^{it}) \sin(t) dt \right) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} (\hat{\psi}(e^{it}) - \hat{\psi}(e^{-it})) \sin(t) dt \right) < 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, hemos demostrado que $\mathbf{Im}(\psi_z(0)) \neq 0$, lo que prueba el lema. \square

Como se mencionó anteriormente, las consideraciones de Choquet conducen a una versión generalizada del Teorema de Radó-Kneser-Choquet.

Teorema 2.5.3. (Teorema de Radó-Kneser-Choquet forma general) Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un dominio convexo acotado cuya frontera es una curva de Jordan γ y $\hat{\varphi}$ un mapeo continuo de $\partial\mathbb{D}$ en γ . Suponga que $\hat{f}(e^{it})$ recorre una vez alrededor de γ de forma monótona mientras e^{it} corre alrededor de $\partial\mathbb{D}$. Luego la extensión armónica

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - |z|^2}{|e^{it} - z|^2} \varphi(e^{it}) dt$$

mapea a \mathbb{D} univalentemente en Ω .

Demostración. Sin pérdida de generalidad, suponga que $\widehat{f}(e^{it})$ corre alrededor de γ en sentido antihorario a medida que t aumenta (de lo contrario, tome conjugados). Entonces, partiendo de igual forma que en **Teorema 2.5.1**, que si la función f no es localmente univalente en \mathbb{D} , se tiene que la función armónica de valor real $\psi = au + bv$ tiene un punto crítico en z_0 (ya que $(a, b) \neq (0, 0)$). Sin embargo, la hipótesis del Teorema implica que ψ satisface la hipótesis del **Lema 5.5.2**, es decir, $\psi_z(z_0) \neq 0$. Por lo tanto, tenemos una contradicción, por lo que f debe ser localmente univalente. Luego, para obtener la univalencia global, se sigue el mismo argumento que en el **Teorema 2.5.1**, lo que concluye la prueba. \square

Corolario 2.5.4. Sea ϕ un homeomorfismo de la $\partial\mathbb{D}$ en la frontera de un dominio $\Omega \subset \mathbb{C}$ de Jordan acotado. Entonces, la integral de Poisson $f = P[\phi]$ es univalente en \mathbb{D} si y sólo si $f(\mathbb{D}) = \Omega$.

Demostración. Véamos la prueba de ambas implicaciones.

" \Rightarrow " Supongamos que f es univalente en \mathbb{D} pero $f(z_1) \notin \Omega$ para algún punto $z_1 \in \mathbb{D}$. Por el Teorema de Lewy (**Teorema 2.2.1**) tenemos que f preserva la orientación en \mathbb{D} y su dilatación $a = \frac{\partial_z f(z)}{\partial_{\bar{z}} f(z)}$ satisface $|a(z)| < 1$. En particular, f es un mapeo abierto. Sea $z_0 \in \mathbb{D}$ tal que $f(z_0) \in \Omega$, y tomemos a $z = z(t)$, $0 \leq t \leq 1$, como un arco simple en \mathbb{D} de z_0 a z_1 . Definamos

$$\tau = \inf \{t \in [0, 1] : z(t) \notin \Omega\},$$

y, sea $z_2 = z(\tau)$. Entonces $w_2 = f(z_2) \in \partial\Omega$, y f mapea cada vecindad abierta de z_2 en una vecindad abierta de w_2 , ya que f es un mapeo abierto. Sin embargo, f tiene una extensión continua en la frontera, y $f(\xi) = w_2$ para algún punto $\xi \in \partial\mathbb{D}$. De esto concluimos que f asume ciertos valores cerca de w_2 en dos puntos distintos en \mathbb{D} , uno cerca de z_2 y el otro cerca de ξ . En otras palabras, f no es univalente. Por lo tanto, $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$ si f es univalente en \mathbb{D} . Pero ya hemos notado que $f(\mathbb{D}) \supset \Omega$ para cualquier extensión continua de la función límite \widehat{f} , así $f(\mathbb{D}) = \Omega$.

" \Leftarrow " Supongamos que $f(\mathbb{D}) = \Omega$, como \mathbb{D} es convexo, entonces $f(\mathbb{D})$ es convexo, así tenemos que Ω es convexo, entonces por el Teorema de Radó-Kneser-Choquet (**Teorema 2.5.1**) se tiene que f es univalente en \mathbb{D} . \square

2.6. Comentarios y consideraciones finales

► El teorema es falso si Ω no es convexo, ya que el rango de f no necesitará estar en Ω . Sin embargo, como señaló Kneser, su prueba se aplica sin ningún cambio esencial al caso de una curva de Jordan γ que encierra una región no convexa Ω , siempre que se suponga que $f(\mathbb{D}) \subset \Omega$. Entonces, aunque la línea $a_0u + b_0v = c$ puede encontrarse con γ en muchos puntos, la imagen (conectada) $f(N_c(\delta))$ está confinada al segmento de esa línea que se encuentra en $\overline{\Omega}$ y contiene el punto $w_0 = f(z_0)$. Este segmento se encuentra con γ en exactamente dos puntos, por lo que el argumento continúa como antes.

► Una consecuencia del Teorema de Radó-Kneser-Choquet es la existencia de muchas asignaciones armónicas del disco unitario en una región convexa dada. A diferencia del comportamiento rígido de los mapeos conformes, que están completamente determinados por las imágenes de tres puntos sobre la frontera, los mapeos armónicos permiten prescribir la correspondencia de la frontera en cada punto con solo restricciones leves. La mayor flexibilidad es a veces una ventaja, pero tiene la desventaja obvia de que un mapeo armónico no está determinado de ninguna manera por su rango.

► El Teorema de Radó-Kneser-Choquet no puede generalizarse a otras dimensiones, es decir, dado un homeomorfismo de la esfera unitaria a la frontera de un dominio convexo acotado en \mathbb{R}^n , la extensión armónica a la bola no necesariamente es univalente. En 1994, Richard Laugesen construyó un homeomorfismo de la esfera unitaria en \mathbb{R}^3 sobre sí mismo, cuya extensión de Poisson a una función armónica de valor vectorial no es univalente en la bola. Laugesen llama a su construcción "homeomorfismo de pelota de tenis". Esto puede verse como una deformación de la esfera al mover una gran parte del hemisferio norte al hemisferio sur, y viceversa, para que

el ecuador se transforme en una curva que se asemeja a la costura de una pelota de tenis. Si esto se hace simétricamente, la extensión armónica resultante mapeará el eje polar de la esfera sobre sí misma, pero producirá un plegado cerca del centro. Para entrar un poco en detalle, Laugesen hizo la siguiente construcción.

Sea $\mathbf{x} = (x, y, z)$ y $\mathbf{u} = (u, v, w)$ puntos en \mathbb{R}^3 , y sea $|\mathbf{x}|^2 = x^2 + y^2 + z^2$. Para cualquier función continua de valor vectorial $\mathbf{x} = g(\mathbf{u})$ en la esfera unitaria

$$S^2 = \{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{u}| = 1\},$$

la extensión armónica a la bola unitaria

$$B^3 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : |\mathbf{x}| < 1\},$$

está dada por la fórmula de Poisson

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{S^2} \frac{1 - |\mathbf{x}|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{u}|^2} g(\mathbf{u}) d\sigma(\mathbf{u}), \quad \mathbf{x} \in B^3,$$

donde $d\sigma$ denota el elemento del área de superficie en términos de coordenadas esféricas. Luego la extensión armónica del homeomorfismo g no es univalente en la bola unitaria.

► Duren y Hengartner [1] han adaptado la idea básica de Kneser para generalizar el teorema a mapeos armónicos en dominios simplemente conexos. Esta generalización es conocida con el nombre del **Teorema del Mapeo de Riemann para Funciones Armónicas**. El objetivo de Duren y Hengartner fue encontrar alguna forma de clasificar los mapeos y especificar un mapeo armónico particular de \mathbb{D} sobre Ω , es de esperarse que algunos datos adicionales serian necesarios para determinar de manera única la función de mapeo. En este punto, la teoría de los mapeos cuasiconformes es la que ofrece gran valor a la determinación de esos datos.

Bibliografía

- [1] P. Duren and W. Hengartner, Harmonic mappings of multiply connected domains. *pacific journal of mathematics*, **180**(2) (1997), 201-219.
- [2] J. Clunie and T. Sheil-Small, Harmonic univalent functions. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser.A.I*, **9** (1984), 3-25.
- [3] J. Conway, *Functions of One Complex Variable*. 2ed. Springer-Verlag, New York, 1978.
- [4] P. Duren and W. Hengartner, A survey of harmonic mappings in the plane. *Texas Tech University, Mathematics Series*, **18** (1992), 1-15.
- [5] W. Hengartner and G. Schober, Harmonic Mappings with Given Dilatation. *J. London Math . Soc.* (2) **33** (1986) 473-483.
- [6] P. Duren, *Harmonic Mappings in the Plane*. Springer-Verlag, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press 2004.
- [7] T. Gronwall, Some remarks on conformal representation. *Ann. Math.*, (*Princeton*), **16**, (1914/15), 72-76.
- [8] L. Ahlfors, *Complex Analysis*. 3ed McGraw-Hill 1979.
- [9] J. Marsden and M. Hoffman, *Análisis básico de variable compleja*. Trillas, México, 1996.
- [10] B. Palka, *An Introduction to Complex Function Theory*. Springer-Verlag, New York, 1991.

- [11] R. Churchill and J. Brown, *Complex Variables and Applications*. McGraw-Hill Education, 2 Penn Plaza, New York, **9** (2009).
- [12] P. Duren, *Univalent functions*. Springer-Verlag, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 259, 1983.
- [13] C. Pommerenke, *Univalent Functions*. Vandenhoeck y Ruprecht, Göttingen, 1975.
- [14] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis* (Third Edition, McGraw-Hill, New York, 1976)
- [15] O. Giraldo, (2018). *Teorema de la convergencia en el sentido del kernel de Carathéodory* (Tesis de pregrado). Universidad de Córdoba, Montería, Colombia.
- [16] J. García, (2013). *El Teorema de representación conforme de Riemann* (Tesis pregrado). Universidad de Murcia, Murcia, España.